الجبر التطبيقي

Applied Algebra

الأستاذ الدكتور // إميل شكرالله

بطاقة فهرسة

فهرسة أثناء النشر إعداد الهيئة العامة لدار الكتب والوثائق القومية

إدارة الشئون الفنية

شكرالله، إميل

الجبر التطبيقي Applied Algebra/د.إميل شكر الله- ط١ —

القاهرة دار النشر للجامعات، ٢٠٠٧.

ص، ٢٤سم.

تدمك ٤ ١٩٩ ٣١٦ ٩٧٧

١- الجبر

أ- العنوان

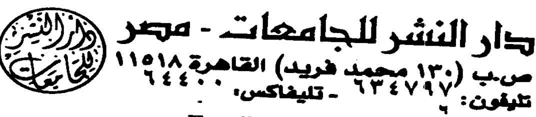
تاريخ الإصدار: ١٤٢٨هـ - ٢٠٠٧م

حقوق الطبع: محفوظة للمؤلف

رقم الإيداع: ٢٠٠٧/٤٣٩٦

الترقيم الدولي: ISBN: ٩٧٧-٣١٦ - ١٩٩ -٤

الكود: ٣/٣٨٤



دار النشر للجامعات - مصر

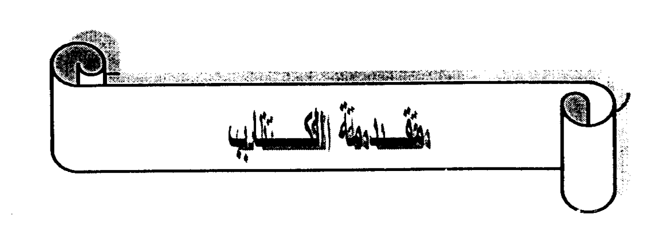
ص.ب (١٣٠ محمد فريد) القاهرة ١١٥١٨

تليفون: ٦٣٤٧٩٧ - تليفاكس: ٦٤٤٠٠

Email: darannshr@link.net

إهداء إلى ..

أغلى اسم في الوجود .. مصر



مقدمة الكتاب

يتعامل الإنسان مع العالم الذي يعيش فيه مستخدماً في ذلك لغتين: لغة الحروف، ولغة الأرقام. فيستخدم لغة الحروف الهجائية *(alphabetic)* بكل مفرداتها وقواعدها في تسمية الأشياء ووصفها بالكلمات *(words)*، ويستخدم لغة الأرقام *(digits)* في تحديد قيمتها ومعرفة مقدارها الجبري بالأعداد *(numbers)*.

من هنا ترجع أهمية علم الجبر *(Algebra)* في قدرته على تقييم الأشياء المادية وتثمينها ووصفها عددياً. هذا، ويتحرك علم الجبر في فضاء ثلاثي الأبعاد : التركيب، التحليل، والترتيب. فعلم الجبر يرتب العناصر على شكل صفوف وأعمدة وهو ما يعرف بالمصفوفات *(matrices)* بل ويُقيِّم هذا الترتيب ويحدد ما يعرف بقيمته الفعلية *(eigenvalue)*. أيضاً فعلم الجبر يتعامل مع المعادلات *(equations)* ويدخل إلى أعماقها ويحللها إلى عواملها الأولية ويستخرج ما يعرف بجذور *(roots)* المعادلة.

ولأن كل شيء في هذا الكون يوجد ضمن منظومة ولا توجد الأشياء بمفردها فعلم الجبر يصف التركيبات المختلفة للتفاعلات ويكّون منها أنظمة *(algebraic systems)* ويقدم طرق حلول هذه الأنظمة. وهذا الكتاب الذي بين يديك يخوض قليلاً في هذا الفضاء الرائع لعلم الجبر محاولاً أكتشاف بعض من عالمه الجميل فيقدم لك المعلومة مقترنه

بالمفهوم العلمي وبعض الملاحظات بطريقة تساعد الدارس على سهولة ربط المعلومات في تسلسل منطقي يمكنه من الإبداع ويدفعه باتجاه الابتكار.

في الباب الأول نتعامل مع المتسلسلات اللانهائية بأنواعها وشروط تقاربها أو تباعدها كما نتطرق لبعض أنواع التقارب مثل التقارب المطلق والتقارب المشروط، وكذلك ندرس متسلسلات القوى. أما الباب الثاني فنتعامل مع نظرية المعادلات وكيفية إيجاد الجذور والعلاقات بين الجذور والمعاملات ونستخدم في ذلك الكثير من المفاهيم مثل القسمة التركيبية.

في الباب الثالث ندرس المصفوفات ونتعرف على أنواعها وخواصها. وكذلك ندرس المحددات وخصائصها ونستخدممها في حل نظم المعادلات.

في الباب الرابع نتعامل مع ما يسمى بالقيم المميزة والمتجهات المميزة للمصفوفة ونتعرف على الفرق بين القيم الجبرية للمحددات والقيم المميزة للمصفوفات ونستخدم هذه المفاهيم في حلول أنظمة من المعادلات التفاضلية الخطية.

في الباب الخامس نقدم طرق حل نظم المعادلات الخطية المتجانسة منها وغير المتجانسة، التي فيها عدد المعادلات يساوي عدد المجاهيل أو التي لا يتساوى فيها عدد المعادلات مع عدد المجاهيل. في الباب السادس نقدم الطرق التكرارية للحصول على حلول أنظمة المعادلات فتعرف على طريقة جاكوبي وطريقة زايدل ولا ننسى التعرف على شروط تقارب الحلول التكرارية.

في الباب السابع نعرج على موضوع بسيط وشيق وكثير الاستخدام فنتعرف على نظرية ذات الحدين وبعض المفكوكات الهامة وتطبيقاتها لحساب مجموع بعض المتسلسلات اللانهائية. هذا كله تجده بالشرح المبسط والأسلوب الشيق.

والكتاب مدعم بالكثير من الأمثلة المحلولة بالتفصيل. ويستفيد من هذا الكتاب طلاب كليات الهندسة والعلوم والحاسبات وكليات التربية وكل المهتمين بالموضوع. أرجو الله القدير أن يبارك هذا الجهد من أجل المنفعة والفائدة، وأن يجعله إثراءً للمكتبة العربية للرياضيات. والله الموفق.

د. إميل شكرالله

المحتوى العلمي الكتاب





1 المتسلسلات اللانهائية
INFINITE SERIES

في علم الرياضيات الرائع توجد الكثير من الكائنات الرياضية النشطة *(Active)* والتي تعتبر بمثابة أدوات للبحث والحساب تحتاجها كل العلوم الأخرى بدون أي استثناء. فالدوال *(Functions)*، المتتابعات *(Sequences)*، المتواليات *(Progression)*، المصفوفات *(Matrices)*، المحددات *(Determinants)*، والمتسلسلات *(Series)* وغيرها الكثير والكثير هي كائنات رياضية نشطة متواجدة في شتى نواحي الحياة وظواهرها الطبيعية.

كلٌ من هذه الكائنات له من الصفات النوعية والخصائص التي تميزه عن غيره، كما أن لكل من هذه الكائنات مجالات واستخدامات تسهم جميعها في الوصول إلي الحلول المثلى للمشاكل التي تواجه الإنسان سواء كانت هذه المشاكل علمية أو اقتصادية، اجتماعية أو غيرها.

في هذا الباب ندرس المتسلسلات اللانهائية وهي كائن رياضي غير متناهي من حيث عدد الحدود. و لا يوجد ما يسمى متسلسلات نهائية فالمتسلسلات هي دائماً لانهائية من حيث عدد الحدود على عكس المتواليات العددية *(progression)* والتي حدودها محدودة

من حيث العدد. والعجيب في الأمر أن معظم الكائنات الرياضـية التي نعتبرها محدودة من ناحية عدد حدودها يمكن تمثيلـها علـى شكل متسلسلات لانهاية ذات عدد لانهائي من الحدود.

لكي نتفهم ذلك دعنا نتأمل المثال التالي: لنفرض أن المسافة بينك وبين باب الغرفة التي تجلس بداخلها هي مترين مثلاً وانك تحركت نحو الباب مسافة متر واحد، ثم مسافة $\frac{1}{2}$ متر، ثم مسافة $\frac{1}{4}$ متـر، وهكذا تستمر بالتحرك في كل مرة نصف المـسافة المتبقيـة. في الحقيقة سوف تكتشف أنك تتعامل مع متسلسلة لا نهائيـة أي أن حدودها لا تنتهي مع العلم أن مجموعها هو العدد 2، بمعنى أن

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+\ldots=2$$

بالتأكيد إذا استمر الإنسان في التحرك بهذه الطريقة فإنه لن يصل إلي باب الغرفة أبداً. في الواقـع أن المتسلـسلات ذات الحـدود اللانهائية تفيد في معرفة الكثير عن الظواهر الطبيعية، كمـا أنهـا تساعد في تمثيل الدوال المعقدة في صور أو صيغ رياضية بـسيطة يمكن التعامـل معهـا بـسهولة و خاصـة في مـسائل العلـوم والتكنولوجيا. ولدراسة المتسلسلات نبدأ أولاً بدراسة ما يـسمى المتتابعات اللانهائية *(Infinite Sequences)*.

1.1 المتتابعة اللانـهائية

الباحث في معمله يرصد النتائج ويدونها بترتيب. فهـــو لا يــدون القراءة الثانية إلا بعد تدوين القراءة الأولى ولا يدون القراءة الثالثة إلا بعد القراءة الثانية. هذا الترتيب في وضع المعلومات لـــه أهميـــة كبرى في تحليل النتائج واستنباط القوانين والقواعد الرياضية الـــتي تحكم الظواهر والتفاعلات والتجارب العلمية التي يجريها. ويستطيع الباحث المدقق أن يتوقع الشكل الرياضي للقراءة التالية بعد عـــدد محدد من القراءات ويتوقع أن يستمر التغير أو التفاعل بنفس التشابه النمطي إلي عدد لا نهائي من القراءات أو لا يستمر. هكذا يمكن أن نعرف ما يسمى بالمتتابعة اللانهائية. وبالتأكيد فإن المتتابعة ليس لهـــا قيمة جبرية أي مجموع جبري، ولذلك سوف نبحث في وجود نهاية لها عندما تقترب حدودها من اللانهاية، كما ســـنبحث في إمكانيـــة تقاربها إلي عدد حقيقي.

تعريف 1.1 | **المتتابعة اللانـهائية**

تُعرف المتتابعة اللانهائية على أنها دالة f في المتغير n نطاقها هو فئة الأعداد الموجبة الصحيحة $R^{+} = \{1,2,3,...\}$.



ماذا يعني هذا الكلام ؟ يعني أنه إذا كانت $f(n)$ متتابعة لانهائيـــة فإنه يوجد لكل عدد صـــحيح موجـــب $n \in R^{+}$ عـــدد وحيـــد حقيقي $f(n)$. وعلى هذا فإن الحد الأول في المتتابعة هـــو $f(1)$، والحد الثاني هو $f(2)$ وهكذا نستمر حتى نصل إلي آخر حد أو ما يـــسمى الحـــد النـــوني $f(n)$ وتكتـــب المتتابعـــة عندئـــذٍ في الصورة $\{f(1), f(2), f(3), \ldots f(n), \ldots\}$. و للتبسيط يمكن كتابتها في الصورة $\{a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots\}$. وكثيرا ما يعـــبر عـــن المتتابعـــة بالرمز $\{a_n\}$. فالمتتابعة $\{\ldots, 2^n, \ldots, 2, 4, 8\} = \{2^n\}$ ـــ مـــثلاً ـــ الحد النوني فيها هو $a_n = 2^n$.

الآن من حقنا أن نتساءل هل يخضع هذا الكائن الرياضي الجديـــد لعمليات جبرية مثله مثل الكائنات الرياضية الأخـــرى؟ الإجابـــة بالتأكيد نعم. على أية حال دعنا نتعرف الآن على كيفية تـــساوي متتابعتين.

تعريف 1.2 — **تساوي متتابعتين**

يقال للمتتابعتين $\{a_n\}, \{b_n\}$ انهما متساويتان إذا كـــان $a_i = b_i$ لكل عدد صحيح موجب i.

▲▲▲

ولهذا فإن <u>ترتيب العناصر في المتتابعة أمر هام جداً</u> وذلك بعكس الفئات حيث لا يعني ترتيب العناصر فيها أي شئ.

تعريف 1.3 — نـهاية متتابعة

يقال أن للمتتابعة $\{a_n\}$ توجد نهاية تساوى العـــدد الحقيقـــي L عندما $n \to \infty$ و تكتب في الصورة $\lim_{n \to \infty} a_n = L$ إذا كان لأي عدد موجب ε، صغير لدرجه كافية يوجد عدد صحيح موجـــب N بحيث يكون $(a_n - L) < \varepsilon$ لكل $n > N$.

▲▲▲

تعريف 1.4 — تقارب وتباعد المتتابعة

المتتابعة التي توجد لها نهاية تسمى متتابعـــة تقاربيـــة وبالإنجليزيـــة *(Convergent Sequence)* وأحياناً يقـــال أن المتتابعـــة تتقـــارب *(Converges)*. فإذا لم توجد لها نهاية أو إذا كان

$$\lim_{n \to \infty} a_n \to \infty$$

فإن المتتابعة تسمى تباعدية *(Divergent Sequence)* أو يقال أنهـــا تتباعد *(Diverges)*.

▲▲▲

مثال 1.1 ادرس وجود نهاية للمتتابعة التي حدها النوني هو

$$a_n = 2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^n$$

الحل الخمسة حدود الأولى في هذه المتتابعة هي

$$2-\frac{1}{2},\ 2+\frac{1}{4},\ 2-\frac{1}{8},\ 2+\frac{1}{16},\ 2-\frac{1}{32},\ \cdots$$

من الملاحظ أن حدود المتتابعة تقترب من العدد 2 إما بالزيادة قليلاً وإما بالنقصان قليلاً عندما $n\to\infty$ وحسب شرط وجــود نهايــة للمتتابعة فإن

$$(a_n-2)=\left(2+\left(-\frac{1}{2}\right)^n-2\right)=\left(-\frac{1}{2}\right)^n=\frac{(-1)^n}{2^n}\to 0$$

عندما $n\to\infty$. و تكون نهاية المتتابعة عندئذٍ هي

$$\lim_{n\to\infty}\left[2+\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right]=2$$

✍.

تعريف 1.5 المتتابعة المحــــــــــــــدودة **Bounded Sequence**

يقال أن المتتابعة $\{a_n\}$ محدودة، إذا وجــد العــددان الموجبــان الحقيقيان P,Q بحيث يكون $P\le a_n\le Q$ لكل قيم n.

▲▲▲

مثال 1.2 بَين ما إذا كانت المتتابعات التالية محدودة

$$\left\{\frac{3}{2},\ \frac{5}{4},\ \cdots,\ \frac{2n+1}{2n},\ \cdots\right\},\{2,\ 4,\ 6,\ \cdots,\ 2n,\ \cdots\}$$

الحل واضح أن المتتابعة اليمنى غير محدودة أما الثانية فهي محدودة وذلك

لان $\frac{3}{2} \geq \frac{2n+1}{2n} \geq 1$ لكل قيم n.

1.2 المتسلسلة اللانهائية

تعرفنا في الباب السابق على المتتابعة وعرفنا أن للمتتابعة يمكــن أن توجد نهاية ولا يوجد لها مجموع جبري. في هــذا الفــصل ســوف نتعرف على ما يسمى المتسلسلة اللانهائية كمجموع جبري لعناصر المتتابعة اللانهائية. في الواقع فإن للمتسلسلة يمكن أن توجد قيمــة جبرية، هذه القيمة هي عبارة عن حاصل جمع عناصرها اللانهائيــة وفي هذه الحالة يقال أنها متسلسلة تقاربية فإذا لم يوجد لها مجمــوع فإنها تكون تباعدية. في هذا الفصل ـــ أيضاً ـــ سوف نتعرف على ثلاثة اختبارات لتحديد نوع المتسلسلة مــن حيــث التقــارب أو التباعد.

تعريف 1.6 — **المتسلسلة اللانهائية Infinite Series**

إذا كانت $\{a_n\}$ متتابعة لانهائية فإن

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots$$

تسمى متسلسلة لانهائية.

▲▲▲





متسلسلة لانهائية $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ يمكن تكوين المجاميع الجزئية الآتية:

$$S_1 = a_1, S_2 = a_1 + a_2, \ldots, S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n$$

و تسمى المتتابعة $\{S_1, S_2, \cdots, S_n, \cdots\}$ متتابعة المجاميع الجزئية *(Partial Sums)* المصاحبة للمتسلسلة اللانهائية $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

المتسلسلات أيضاً يمكن أن تتقارب أو تتباعد ولكن لـــيس كمـــا تتقارب وتتباعد المتتابعات. فالمتسلسلة تتقارب إذا كان لها مجمـــوع وكان هذا المجموع عدداً حقيقياً. فإذا أقترب المجموع من اللانهايـــة كانت المتسلسلة تباعدية.

تعريف 1.7 تقارب أو تباعد المتسلسلات

لنعتبر المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. إذا كان $\lim_{n \to \infty} S_n = S$ فإنه يقـــال أن $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ تقاربية، حيث $\{S_1, S_2, \cdots, S_n, \cdots\}$ هـــي متتابعـــة المجاميع الجزئية المصاحبة للمتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. إذا لم يوجد العـــدد الحقيقي S فإن المتسلسلة تكون تباعدية.

▲▲▲

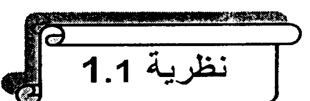




عدم وجود العدد الحقيقي S يعني إما أن

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \infty$$

أو أن المتسلسلة تتزايد وتتناقص في آن واحد دون الوصول إلي نهاية محدودة، كما في المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n$ مثلاً. هذا، وتوجد أنـــواع كثيرة من المتسلسلات التقاربية المشهورة في عالم المتسلسلات نقدم منها على سبيل المثال ـــ المتسلسلة الهندسية.



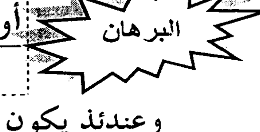
المتسلسلة الهندسية اللانـــــهائية
Infinite Geometric Series

المتسلسلة الهندسية

$$a + ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-1} + \ldots ; \;\; a \neq 0$$

تتقارب إذا كان $r < 1$ و تتباعد إذا كان $r \geq 1$.

✪✪✪



أولاً : في حالة $r = 1$. في هذه الحالة فإن

$$S_n = a + a + \cdots + a = na$$

وعندئذ يكون

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} na = \infty$$

وبالتالي فإن المتسلسلة تكون تباعدية. ثانياً: في حالة $r \neq 1$ فإن

$$S_n = a + ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-1} \tag{1.1}$$

وبضرب الطرفين في الأساس r، نحصل على

$$rS_n = ar + ar^2 + ar^3 + \cdots + ar^n \qquad (1.2)$$

و بطرح المعادلتين (1.1), (1.2) نحصل على

$$(1-r)S_n = a - ar^n$$

وهكذا نجد أن

$$S_n = \frac{a}{1-r} - \frac{ar^n}{1-r}$$

وبالتالي فإن

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{a}{1-r} - \frac{ar^n}{1-r}\right) =$$

$$= \frac{a}{1-r} - \frac{a}{1-r}\lim_{n\to\infty} r^n$$

والنهاية الأخيرة تتوقف على قيمة r هل هي أقـــل مـــن الواحـــد الصحيح أم هي اكبر من الواحد الصحيح؟ فإذا كان $|r| < 1$ فـــإن $\lim_{n\to\infty} r^n = 0$، وبالتالي نجد أن

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{a}{1-r}$$

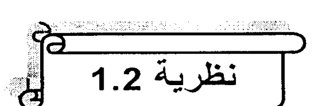
و تكون بذلك المتسلسلة تقاربية ومجموعها هو المقدار $\frac{a}{1-r}$. أما إذا كان $|r| > 1$ فإن $\lim_{n\to\infty} r^n = \infty$ وفي هـــذه الحالـــة تكـــون المتسلسلة تباعدية.

مثال 1.3 ادرس المتسلسلة من حيث التقارب أو التباعد

$$3+\frac{3}{4}+\frac{3}{4^2}+\frac{3}{4^3}+\cdots+\frac{3}{4^{n-1}}+\cdots$$

الحل بما أن هذه المتسلسلة هندسية، أساسها $r=\frac{1}{4}<1$، إذن حـــسب النظرية (1.1) فهي تقاربية ومجموعها هو $S=\frac{3}{1-\frac{1}{4}}=4$.

✍.



النظريات الآتية كلها صحيحة

(1) إذا كانت $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ تقاربية فهذا يعني أن $\lim_{n\to\infty} a_n=0$ ولكن العكس ليس صحيحاً، أي أنه إذا كان $\lim_{n\to\infty} a_n=0$ فليس مـــن الضروري أن تكون المتسلسلة تقاربية.

(2) إذا كان $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$ فإن المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ تكون تباعدية.

(3) إذا كانـــت المتســلـــسلتان $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ ، $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ تقـــاربيتين فـــإن المتسلسلات

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)\,,\ \sum_{n=1}^{\infty}(a_n-b_n)\,,\ \sum_{n=1}^{\infty}ca_n$$



تكون أيضا كلها تقاربية، حيث c عدد حقيقي.

(4) إذا كانت $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ تقاربية بينما $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ تباعدية فإن المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$ تكون أيضاً تباعدية.

✪✪✪

مثال 1.4 ادرس المتسلسلات من حيث التقارب والتباعد

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{5^n} + \frac{1}{n} \right), \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{7}{n(n+1)} + \frac{2}{3^{n-1}} \right)$$

الحل (1) المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ توافقية *(Harmonic Series)*. بما أن

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} + \cdots$$

إذن نكون المجاميع الجزئية

$$S_4 > 2 \, , S_8 > 2.5 \, , \, \cdots, \, S_{64} > 4, \ldots$$

نلاحظ أن متتابعة المجاميع الجزئية غـــير محـــدودة *(Unbounded)*، وعلى هذا فالمتسلسلة تباعدية. لاحظ ــ أيــضاً ــ أن المتسلـــسلة تباعدية مع أن $\lim_{n \to \infty} a_n = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} = 0$.

(2) بما أن المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{5^n}$ هندسية أساســـها $r=\frac{1}{5}<1$ ، إذن فهي تقاربية. وبما أن المتسلسلة التوافقية $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ تباعدية، إذن فإن المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{5^n}+\frac{1}{n}\right)$ هي أيضاً تباعدية، طبقاً للنظرية (1.2).

(3) بما أن المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}$ تقاربيـــة، إذن فالمتسلـــسلة $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{7}{n(n+1)}$ تقاربية أيضاً. وبما أن المتسلسلة الهندســـية $\frac{2}{3^{n-1}}$ تقاربية، إذن فالمتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{7}{n(n+1)}+\frac{2}{3^{n-1}}\right)$ تقاربية أيضاً.

1.3 اختبارات التقـــارب(التبـــاعد) للمتسلسلات الموجبة

أحيانا يكون من الصعب الحصول على الحد النوني للمجاميع الجزئية S_n وبالتالي يصعب تحديد ما إذا كانـــت المتسلـــسلة تقاربيـــة أو تباعدية. سنحاول الآن التعامل مع الحد النوني للمتسلـــسلة a_n، وليس الحد النوني للمجاميع الجزئية S_n، وذلك من خلال بعـــض الاختبارات لمعرفة التقارب أو التباعد.

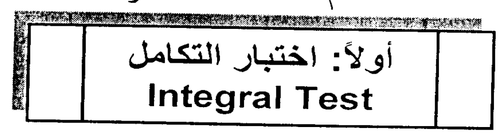
وسنبدأ باختبارات التقارب أو التباعد للمتسلسلات ذات الحـــدود الموجبة *(Positive Terms Series)*.

تعريف 1.8 المتسلسلات ذات الحدود الموجبة

متسلسلة الحدود الموجبة هي متسلسلة كل حدودها موجبة، كمـــا أن متتابعة المجاميع الجزئية لهـــا مطـــردة *(Monotonic)* ، بمعـــنى أن $S_1 < S_2 < \cdots < S_n < \cdots$.

▲▲▲

هذا، ولمعرفة ما إذا كانت مثل هذه المتسلسلات تقاربية أم تباعدية سنقدم الآن ثلاثة اختبارات.



لنفرض أن لدينا المتسلسلة

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots$$

وأننا استطعنا أن نعبر عن الحد النوني في الصورة $f(x) = a_n$ بحيث

$$a_1 = f(1),\ a_2 = f(2),\ \cdots,\ a_n = f(n),\ \cdots$$

لكل $x \geq 1$ و بحيث تكون الدالـــة $f(x)$ ذات حـــدود موجبـــة ومتصلة، وتناقصية لكل $x \geq 1$، إذن فإن

(1) المتســــلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ تكــــون تقاربيــــة إذا كـــان التكامـــل $\int_1^{\infty} f(x)dx$ تقاربي (قيمته الجبرية مقدار حقيقي).

(2) المتســــلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ تكــــون تباعديــــة إذا كـــان التكامـــل $\int_1^{\infty} f(x)dx$ تباعدي *(Divergent)* أي أن $\int_1^{\infty} f(x)dx = \infty$.

✪✪✪

مثال 1.5 ادرس المتسلسلتان من حيث التقارب أو التباعد

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{3+2n}\right)^2$$

الحل (1) نضع $f(x) = \frac{1}{x}$ وحيث أن $f(x)$ دالة موجبــة الحـــدود ومتصلة وتناقصية لكل قيم $x \geq 1$ ، إذن يمكن تطبيـــق اختبـــار التكامل فنحصل على

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x} dx = \lim_{t \to \infty} \int_1^{t} \frac{1}{x} dx \to \infty$$

إذن المتسلسلة التوافقية $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ تباعدية.

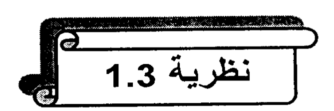
(2) نــــضع $f(x)=\left(\frac{1}{3+2n}\right)^2$، إذن بالتفاضــــل نجــــد أن $f'(x)=\frac{-4}{(3+2x)^3}<0$ وعلى هذا فإن الدالة $f(x)$ موجبة الحدود ومتصلة وتناقصية لكل قيم $\forall x\geq 1$، وحيث أن

$$\int_1^{\infty}\frac{1}{(3+2x)^2}dx =$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{t\to\infty}\int_1^t(3+2x)^{-2}(2dx)=-\frac{1}{2}\lim_{t\to\infty}\left[(3+2x)^{-1}\right]_1^t$$

$$=-\frac{1}{2}\lim_{t\to\infty}\left[\frac{1}{3+2t}-\frac{1}{5}\right]=\frac{1}{10}$$

إذن المتسلسلة تقاربية.



المتسلسلة من النوع
p – series

المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$ والتي تعرف باسم p – series تقاربيـــة إذا كان $p>1$، وتباعدية إذا كان $p\leq 1$.



في حالة $p=1$ فإن $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$ تتحول إلي $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$

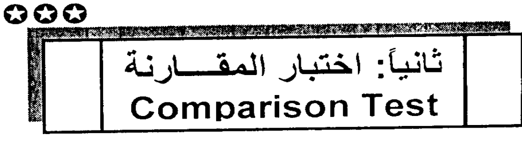
وهي متسلـــسلة توافقيـــة تباعديـــة. وفي حالـــة $p \neq 1$، نـــضع $f(x) = \frac{1}{x^p}$ وهي دالة موجبة الحدود و متصلة لكل قيم $x \geq 1$ وبما أن $f'(x) = -px^{-p-1} < 0$، إذن فإن الدالة $f(x)$ تناقصية لكل قيم $x \geq 1$. لكن وبما أن

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^p} dx = \lim_{t \to \infty} \int_1^{\infty} x^{-p} dx = \frac{1}{1-p} \lim_{t \to \infty} \left[t^{1-p} - 1 \right]$$

إذن فإنه إذا كان $p > 1$، فإن $p - 1 > 0$ وبالتالي فإن

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^p} dx = \frac{1}{1-p} (0-1) = \frac{1}{p-1}$$

وفي هذه الحالة فإن المتسلسلة تكون تقاربية. أما في حالـــة $p < 1$، أو $1 - p > 0$ فإن $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^p} dx \to \infty$ وتكون المتسلسلة تباعدية.



ثانياً: اختبار المقـــارنة Comparison Test

لنعتبر المتسلسلتين $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ ، $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ، ذات الحدود الموجبة، فإذا كان

(1) $a_n \le b_n$، لكل عدد صحيح موجب n وكانــــت $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$

تقاربية، فإن $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ تكون تقاربية أيضاً.

(2) $a_n \ge b_n$، لكل عدد صحيح موجب n وكانت المتسلــــسلة

$\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ تباعدية فإن $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ تكون هي أيضاً تباعدية.

✪✪✪

مثال 1.6 ادرس من حيث التقارب أو التباعد المتسلسلة

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{4^n + 1}$$

الحل لنفرض أن
$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{4^n + 1}$$

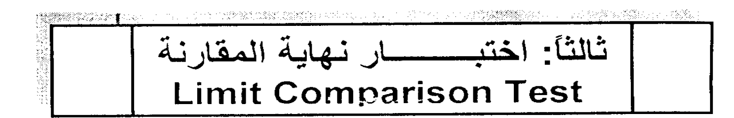
ولإستخدام اختبار المقارنة علينا أن نبحث عن متسلـــسلة أخـــرى

$\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ مثلاً، بحيث تكون معروفة لدينا من حيـــث التقـــارب أو

التباعـــد . لنختـــر المتسلـــسلة $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{4^n}$ وبمـــا أن

$\frac{3}{4^n} = 3\left(\frac{1}{4}\right)^n$، وحيث أن $\left(\frac{1}{4}\right)^n$ متسلسلة هندســية أساســها

$r=\frac{1}{4}<1$ ، إذن فهي تقاربية. و بما أن $\frac{3}{4^n+1}<\frac{3}{4^n}$ لكل قــيم $n\geq 1$ ، إذن فإن $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3}{4^n+1}$ أيضا تقاربية.



ثالثاً: اختبــــــار نهاية المقارنة Limit Comparison Test

لنعتبر المتسلسلتين $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ، من ذوات الحدود الموجبــة،

فإذا كان
$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=k>0$$

فإن كلا المتسلسلتين $\sum_{n=1}^{\infty} b_n , \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ إما أن تكونا متقاربتين معاً أو متباعدتين معاً.

✪✪✪

مثال 1.7 ادرس من حيث التقارب أو التباعد المتسلسلة

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3n^2+5n}{2^n\left(n^2+1\right)}$$

الحل لدينا $a_n=\frac{3n^2+5n}{2^n\left(n^2+1\right)}$. إذن نختار $b_n=\frac{1}{2^n}$ وهي متسلسلة

هندسية وبالتالي تقاربية. وبما أن

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{3n^2+5n}{\left(n^2+1\right)}=3>0$$

إذن المتسلسلتان تقاربيتان طبقاً لاختبار النهاية.

1.4 المتسلسلات التـــذبذبية - Alternating Series

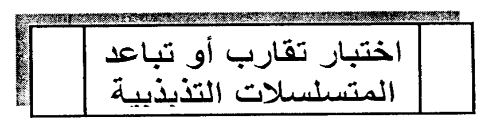
في هذا الفصل نقدم نوعاً آخر من المتسلسلات وهو "المتسلسلات التذبذبية". في الحقيقة أن المتسلسلة المتذبذبـــة أو التذبذبيـــة هـــي متسلسلة حدودها تكون موجبة وسالبة بالتناوب بشرط أن تكـــون حدودها غير صفرية، بمعنى أن $a_i > 0$. على سبيل المثال إذا كـــان $a_i > 0$ فإن المتسلسلات التالية تذبذبية

$$\sum_{n=1}^{\text{¥}}(-1)^{n-1}a_n=a_1-a_2+a_3-a_4+L+(-1)^{n-1}a_n+L$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n=-a_1+a_2-a_3+\cdots+(-1)^n a_n+\cdots$$

فهل تقارب أو تباعد المتسلسلات التذبذبية يشبه تقارب وتباعـــد المتسلسلات ذات الحدود الموجبة أم أن هناك بعـــض الاختلافـــات نتيجة اختلاف التركيبة الرياضـــية للمتســـلسلة التذبذبيـــة عـــن

المتسلسلات الأخرى؟ بالتأكيد أن اختبــار التقــارب والتباعــد للمتسلسلات التذبذبية تختلف عن اختبارات المتسلسلات الأخرى.



اختبار تقارب أو تباعد المتسلسلات التذبذبية

المتسلسلة التذبذبية

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n$$

تتقارب إذا كان $a_i \geq a_{i+1}$ لكل عــدد صــحيح موجــب i،

وكان $\lim_{n \to \infty} a_n = 0$.

✪✪✪

مثال 1.8 ادرس من حيث التقارب أو التباعد المتسلسلة

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{2n}{4n^2 - 3}$$

الحل للتحقق من الشرط الأول: $a_i \geq a_{i+1}$ لكل عدد صحيح موجب i نفرض أن

$$f(x) = \frac{2x}{4x^2 - 3}$$

ثم نوجد المشتقة الأولى لمعرفة ما إذا كانت الدالة $f(x)$ تناقــصية.

بما أن

$$f'(x)=\frac{-8x^2-6}{\left(4x^2-3\right)^2}<0$$

إذن فإن الدالة $f(x)$ تناقصية، بمعنى أن $a_i \geq a_{i+1}$ لكل $x \geq 1$.

للتحقق من الشرط الثاني لدينا

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\frac{2n}{4n^2-3}=0$$

إذن المتسلسلة المعطاة تقاربية.

1.5 التقارب المطلق و التقارب المشـــروط

Absolute and Conditionally Convergence

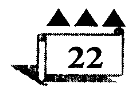
في عالم المتسلسلات يوجد ثلاثة أنواع مـــن التقـــارب: العـــادي، والمطلق والمشروط. إلا أن التقارب المطلق يصبح ذو معنى وأهميـــة للمتسلسلات التذبذبية اكثر من أية متسلسلة أخرى.

تعريف 1.9 — **التقارب المطلق**

يقال أن المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ تتقارب تقاربـــاً مطلقـــاً إذا كانـــت المتسلسلة

$$\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|=|a_1|+|a_2|+|a_3|+..+|a_n|+...$$

تقاربية.



لاحظ أنه إذا كانت المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ذات حدود موجبة فهذا يعني أن $|a_n| = a_n$ وفي هذه الحالة فإن التقارب المطلق يكون هـــو نفسه التقارب العادي.

تعريف 1.10 التقارب المشروط

يقال أن المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ تتقارب تقارباً مـــشروطاً إذا كانـــت المتسلسلة

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = |a_1| + |a_2| + |a_3| + .. + |a_n| + ...$$

تقاربية، بينما المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ذاتها تباعدية.

▲▲▲

مثال 1.9 ادرس المتسلسلة من حيث التقارب المطلق و المشروط:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n} = \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + (-1)^{n-1} \frac{1}{n} + \cdots$$

الحل هنا نجد أن $f(x) = \frac{1}{x}$، وبالتالي فإن

$$f'(x) = \frac{-1}{x^2} < 0 \quad \forall x \geq 1$$

الأمر الذي يعني أن $a_i \geq a_{i+1}$

أيضاً فإن $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$

وبالتالي فإن $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n}$ متسلسلة تذبذبية تقاربية. نـــدرس الآن المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$. بما أن

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{n} + \cdots$$

وحيث أن هذه متسلـــسلة توافقيـــة تباعديـــة، إذن فالمتسلـــسلة $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n}$ تتقارب تقارباً مشروطاً.

✍.

مثال 1.10 ادرس المتسلسلة من حيث التقارب المطلق و المشروط:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n^2} = 1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \ldots$$

الحل نوجد متسلسلة الحدود المطلقة $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots$

و هذه متسلسلة من النوع *p-series* ، وهي تقاربية لان $p = 2$.

إذن المتسلسلة التذبذبية المعطاة تتقارب تقارب مطلق.

✍.

هكذا، وجدنا أنه يمكن استخدام مفهوم التقارب المطلق والتقـــارب المشروط في دراسة المتسلسلات. والآن نقدم بعض الاختبارات التي تسهل عملية تحديد التقارب المطلق.

اختبار النسبـــة للتقارب المطلق

نفرض المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ، إذن فإن

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \begin{cases} L<1 & \text{, the series absolutely converges} \\ L>1 & \text{, the series diverges} \\ L\to\infty & \text{, the series diverges} \\ L=1 & \text{, the series may be absolutely convergent,} \\ & \text{conditionally convergent, or divergent} \end{cases}$$

✪✪✪

مثال 1.11 ادرس المتسلسلة

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2^n}{n!}$$

الحل بما أن

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{2}{n+1} = 0 < 1$$

إذن المتسلسلة مطلقة التقارب.

✍.

اختبار الجذر للتقارب المطلق

لنفرض المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ، إذن

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \begin{cases} L<1 & \text{, the series is absolutely convergent} \\ L>1 & \text{, the series is divergent} \\ L\to\infty & \text{, the series is divergent} \\ L=1 & \text{, the series may be absolutely convergent,} \\ & \text{conditionally convergent, or divergent} \end{cases}$$

✪✪✪

مثال 1.12 ادرس المتسلسلتين

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{3^{n^2}}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(2n^3-1\right)^n}{n^{3n}}$$

الحل (a) نستخدم اختبار الجذر وذلك لان كل من البسط والمقـــام في الحد النوني a_n مرفوع في قوى n. وبما أن

$$\sqrt[n]{|a_n|} = \frac{\left(2n^3-1\right)^{n\cdot\frac{1}{n}}}{n^{3n\cdot\frac{1}{n}}} = \frac{2n^3-1}{n^3} = 2-\frac{1}{n^3}$$

إذن $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 2 > 1$

وتكون المتسلسلة بذلك تباعدية.

(b) بما أن $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{3^n}$

وباستخدام قاعدة لوبيتال (L'Hôpital' Rule)، نحصل على

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{3^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{3^n \ln 3} = 0 < 1$$

إذن المتسلسلة مطلقة التقارب.

1.6 متسلسلات القوى - Power Series

المتسلسلات التي تعاملنا معها في الفصول السابقة كل حدودها مـــن الأعداد الحقيقية. وها نحن الآن نتعامل مع أهم نوع من المتسلسلات ألا وهو متسلسلات القوى التي يمكن اعتبارها ــ إن جاز القول ــ مادة أولية في علم الرياضيات يمكن لمعظم الـــدوال أن ترجـــع إلى الصورة الأصيلة لها على شكل متسلسلات القوى. وهـــي تلعـــب دوراً في غاية الأهمية في نظرية تقريب الدوال.

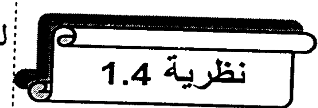
تعريف 1.11 | **متسلسلة القوى**

تُعرف متسلسلة القوى في x على أنهـــا المتسلـــسلة $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$.

لاحظ أن حدود متسلسلة القوى تحتوى على قوى المتغير x، الأمر الذي ليس له وجود في المتسلسلات اللانهائية العادية. ولدراســـة

تقارب متسلسلات القوى يجب تحديد قيم x المختلفــة والــتي تتقارب عندها المتسلسلة.

▲▲▲



لنعتبر متســلسلة القــوى $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-c)^n$ ولنفــرض أن $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = p$ إذن فهنـــاك ثلاث حالات:

(1) المتسلسلة تتقارب فقط عند $x=c$ إذا كـــان $p=+\infty$. (2) المتسلسلة تتقارب لجميع قيم الحقيقية x إذا كان $p=0$. (3) إذا كان $p\in]0,\infty[$ فإن المتسلسلة تتقارب تقارباً مطلقاً لكل قيم x في الفترة $]c-r, c+r[$ وتتباعد المتسلسلة لكل قيم x في الفترة $]-\infty, c-r[\cup]c+r, +\infty[$، حيث $r=\frac{1}{p}$. (4) لدراسة تقارب المتسلسلة عند $x=c-r\,,\ x=c+r$ يتم بالتعويض عـــن هـــذه القيم في المتسلسلة الأصلية واستخدام اختبارات التقارب.

✪✪✪

في الواقع أن العدد الحقيقي r يسمى نصف قطر التقـــارب *(radius of convergence)* للمتسلسلة.

أما فترة تقارب المتسلسلة *(Interval of Convergence)* فهي فئة كل الأعداد الحقيقية x والتي تتقارب عندها متسلسلة القوى.

مثال 1.13 أوجد جميع قيم x التي تتقارب عندها متسلسلات القوى

$$(a)\sum_{n=0}^{\infty} n!\,x^{n},\quad (b)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{n}}{n!},\quad (c)\sum_{n=0}^{\infty}(x-1)^{n}$$

الحل (a) لدينا $a_n = n!\,x^n$، إذن

$$a_{n+1}=(n+1)!\,x^{(n+1)}$$

و باستخدام اختبار النسبة نجد أن

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\left|\frac{(n+1)!\,x^{(n+1)}}{n!\,x^{n}}\right|=$$

$$=\lim_{n\to\infty}(n+1)|x|\to+\infty\ (x\neq 0)$$

إذن حسب النظرية السابقة فإن المتسلسلة تتقارب فقط عند $x=0$.

لاحظ أنه في حالة المتسلسلة المعطاة فإن $c=0$.

(b) في هذه الحالة فإن

$$a_n=\frac{x^n}{n!}\Rightarrow a_{n+1}=\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$$

إذن

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\times\frac{n!}{x^n}\right|=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{|x|}{(n+1)}=0$$

إذن المتسلسلة تتقارب لكل عدد حقيقي x.

(c) في هذه الحالة فإن

$$a_n = (x-1)^n \Rightarrow a_{n+1} = (x-1)^{n+1}$$

إذن

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(x-1)^{n+1}}{(x-1)^n}\right|$$
$$= \lim_{n\to\infty}|x-1| = |x-1|$$

و باستخدام اختبار النسبة نجد أن المتسلسلة تقاربية إذا كان

$$|x-1| < 1 \Rightarrow -1 < x-1 < 1 \Rightarrow 0 < x < 2$$

أي أن المتسلسلة تقاربية لكل عدد حقيقي x في الفترة $x \in]0,2[$.

وتكون المتسلسلة تباعدية إذا كان

$$|x-1| > 1 \Rightarrow x < 0 \text{ or } x > 2$$

عند $x = 0$ فإن المتسلسلة تتحول إلي $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n$ وهي متسلـــسلة تباعدية. عند $x = 2$ فإن المتسلسلة تتحـــول إلي $\sum_{n=1}^{\infty}(1)^n$ وهـــي متسلسلة تباعدية أيضاً. إذن المتسلسلة المعطاة تتقارب تقارباً مطلقاً في الفترة $]0,2[$ والتي تسمى فترة تقارب المتسلسلة.

1.7 مسائل

ادرس المتسلسلات الآتية من حيث التقارب أو التباعد

(1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+n}$

(2) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2-n}$

(3) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2n+1}}$

(4) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln(n)}{2n}$

(5) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\tan^{-1}(n)}{3n^2+3}$

(6) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n^2-4}{n^3+2n^2+1}$

(7) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\left(n^2+5n+1\right)^{\frac{1}{3}}}$

(8) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$

(9) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{n!}$

(10) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n!}$

(11) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$

(12) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{2^n}$

(13) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \sqrt[3]{n}}{2n+5}$

(14) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(n)}{e^n}$

(15) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(n)}{n^3}$

(16) $\sum_{n=1}^{\infty} \cos(\pi n)$

(17) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(\pi n)}{n}$

(18) $\sum_{n=1}^{\infty} ne^{-n}$

(19) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{\ln(n)}$

(20) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n)}{n^2}$

(21) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(n)}{e^{n^2}}$

ادرس المتسلسلات الآتية من حيث التقارب المطلـــق أو التقـــارب المشروط أو التباعد

(22) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 4^n}{3^{\frac{4n}{3}}}$	(25) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{e^n - n}$	(28) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{n^2 - 1}$
(23) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \ln(n)}{n}$	(26) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n\sqrt{n+1}}$	(29) $\sum_{n=1}^{\infty} [\ln(n)]^{-n}$
(24) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} n^{2n}}{(3n^2+1)^n}$	(27) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin\left(\frac{n\pi}{4}\right)}{n^2}$	(30) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{n+1}}{10^{10n-1}}$

أوجد فترة تقارب متسلسلات القوى

(31) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2}{2^{3n}}(x+4)^n$ (34) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2}{2^n} x^n$ (37) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+4} x$

(32) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{10^n}(x-4)^n$ (35) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}} x^n$ (38) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{100^n} x^n$

(33) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(n)}{e^n}(x-e)^n$ (36) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln(n)}{n^3} x^n$ (39) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3n!}{2n!} x^n$

أوجد فترة التقارب مبيناً إذا ما كان التقارب مطلقاً

(40) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!}$ (42) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!x^{2n}}{2n-1}$ (44) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{3n}}{n+5}$

(41) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (x+1)^n}{(n+1)}$ (43) $\sum_{n=0}^{\infty} n(x-1)^n$ (45) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n^2+1}$

****


التسامح يولّد في
الإنسان طاقة موجبة
قادرة على أن ترفع
عنه مشاعر الغضب
وتمنحه السعادة
اميل شكر الله

2 نظـــرية المـــــــعادلات
Theory of Equations

توجد أنواع كثيرة ومتنوعة من العلاقات التي تـــربط الكائنـــات الرياضية بعضها مع بعض. من هذه العلاقات ما تسمى متباينـــات *(Inequalites)* ومنها ما يسمى بالمعادلات *(Equations)* وهـــي علاقات التساوي. فأية علاقة تساوي بين فئة من المتغيرات تسمى معادلة. هذه المعادلات تحتوي على كائنات رياضية نـــشطة مثـــل الدوال *(Functions)*، الفئات *(Sets)*، وغيرها مـــن الكائنـــات الرياضية.

في هذا الباب ندرس المعادلات الجبرية أي المعادلات التي تخـــضع لعمليات الجبر العادية من جمـــع *(Addition)* وطـــرح وضـــرب *(Multiplication)* وقسمة *(Division)*. والمعادلة الجبرية عادة ما تعطى بحيث يكون طرفها الأيمن مساوياً للصفر، والأيسر يتكـــون من المعاملات *(Coefficients)* وقوى المتغير x المختلفة. وللمعادلة الجبرية توجد درجة *(Degree)* كما توجد لهـــا جـــذور *(Roots)* على عكس دالة كثيرة الحدود الجبرية والتي يوجـــد لهـــا درجـــة وأصفار *(Zeros)*.

2.1 المعادلة الجبرية من الدرجة النونية

لنعتبر دالة كثيرة الحدود الجبريـــة *(Polynomial Function)*

$y = P(x)$ من الدرجة n في المتغير x والتي تأخذ الشكل

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0 \quad ; \quad a_n \neq 0 \qquad (2.1)$$

والتي يمكن كتابتها ــ أيضاً ــ في الشكل

$$P(x) = \sum_{k=0}^{n} a_{n-k} x^{n-k}; \quad a_n \neq 0 \qquad (2.2)$$

حيث $n \geq 0$ عدد صحيح موجب. المعاملات $\{a_k\}_{k=0}^{n}$ وعددها $n+1$ هي كميات حقيقية أو مركبه وتـــسمى معـــاملات كـــثيرة الحدود. إذا كانت $P(x) = 0$ فإن (2.1) تصبح معادلة جبرية من الدرجة n وتأخذ الصورة

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = 0 \qquad (2.3)$$

هذا، وتعرف درجة كثيرة الحدود على أنها أكبر أس *(Exponent)* أو أعلى قوة *(Power)* للمتغير x. المعادلة (2.3) تمتلك عـــدد n من الجذور وهي عبارة عن قيم المتغير x والتي تحقق المعادلة (2.3) كما سنرى.

هذا، وتتساوى كثيرتي الحدود $P_1(x), P_2(x)$ ــ مـــثلاً ــ إذا كانت معاملات قوى x المناظرة في كل منهما متساوية.

تعريف 2.1 **قسمة كثيرات الحدود**

إذا كانت $P(x)$ كثيرة حدود من الدرجة n في المتغير x وكانت $Q(x)$ كثيرة حدود من الدرجة m، وكان $m<n$ فإنه يمكن قسمة $P(x)$ على $Q(x)$ بحيث يكون

$$P(x)=Q(x)H(x)+R(x) \tag{2.4}$$

حيث $H(x)$ كثيرة حدود من الدرجة $(n-m)$ و $R(x)$ كثيرة حدود من درجة أقل من $(n-m)$ تسمى "الباقي".

▲▲▲

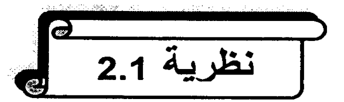
مثال 2.1 أوجد باقي قسمة كثيرة الحدود $P(x)=x^3+4x+4$ على كثيرة الحدود $Q(x)=x+1$.

الحل بالقسمة العادية نحصل على

$$\begin{array}{r|l} & x^2-x+5 \\ x+1 & x^3+4x+4 \\ & \underline{-x^3-x^2} \\ & -x^2+4x+4 \\ & \underline{+x^2+x} \\ & 5x+4 \\ & \underline{-5x-5} \\ & -1=R(x) \end{array}$$

إذن $H(x)=x^2-x+5,\ \ R(x)=-1$

وبالتالي فإن $P(x)=(x+1)(x^2-x+5)-1$



نظرية الباقي
Remainder Theorem

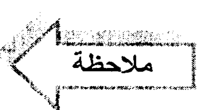
الباقي الذي نحصل عليه بقسمة كثيرة الحدود $P(x)$ على العامل *(Cofactor)* $(x-r)$ هو كثيرة الحدود $P(r)$.



بما أن كثيرة الحدود $P(x)$ يمكن وضعها في الصورة:

$$P(x)=(x-r)H(x)+R \tag{2.5}$$

إذن وبوضع $x=r$ في الطرفين نحصل على $P(r)=R$.



إذا كان باقي القسمة صفراً ، أي إذا كان $R=0$ ، إذن فإن $P(r)=0$.

ويكون $x-r$ عندئذ أحد عوامل كثيرة الحدود $P(x)$ وبالتالي يكون r جذراً للمعادلة $P(x)=0$.

تعريف 2.2

أصفار كثيرات الحدود

فئة جميع قيم x التي تجعل كثيرة الحدود $P(x)$ مساوية للصفر

تسمى أصفار *(Zeros)* كثيرة الحدود $P(x)$ أو تسمى جذور *(Roots)* المعادلة $P(x)=0$.

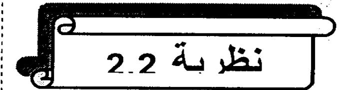
▲▲▲

مثال 2.2 باستخدام نظرية الباقي أوجد باقي قسمة كثيرة الحدود $P(x)=x^3+5x-3$ على العامل $x+1$.

الحل في هذه الحالة فإن $r=-1$ وبالتالي فإن

$$P(r)=P(-1)=(-1)^3+5(-1)-3=-9$$

إذن الباقي هو $R=-9$.



نظرية 2.2

القسمة التركيبية
Synthetic Division

عند قسمة كثيرة الحدود المعطاة في (2.1) على $(x-r)$ يكون ناتج القسمة هو كثيرة الحدود $H_{n-1}(x)$ والباقي هو $R(x)$ ، أي أن

$$P_n(x)=(x-r)H_{n-1}(x)+R(x) \qquad (2.6)$$

✪✪✪

والآن كيف !!

كيف يمكن لنا معرفة كل من الدالتين $R(x), H_{n-1}(x)$ ؟

بما أن $H_{n-1}(x)$ كثيرة حدود من الدرجة $n-1$ إذن نفرض أن

$$H_{n-1}(x)=b_{n-1}x^{n-1}+b_{n-2}x^{n-2}+\cdots+b_0 \qquad (2.7)$$

ويكون المطلوب هو إيجاد المعاملات b_j لكل $j=\overline{0,n-1}$ علاوة على حساب الباقي R والـــذي يمكـــن حـــسابه مـــن العلاقـــة $R=P(r)$. بالتعويض في (2.1) من العلاقات (2.7) ,(2.6) نحصل على

$$\begin{aligned}
&a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 = \\
&= (x-r)\left(b_{n-1}x^{n-1} + b_{n-2}x^{n-2} + \cdots + b_0\right) + R \\
&\quad = b_{n-1}x^n + \left(b_{n-2} - rb_{n-1}\right)x^{n-1} + \\
&\quad + \left(b_{n-3} - rb_{n-2}\right)x^{n-2} + \cdots + \left(R - rb_0\right)
\end{aligned}$$

وبمساواة معاملات قوى x في الطرفين نجد أن

$$b_{n-1} = a_n,\ \left(b_{n-2} - rb_{n-1}\right) = a_{n-1}, \ldots,\ \left(R - rb_0\right) = a_0$$

أو

$$b_{n-1} = a_n\ ,\ b_{n-2} = a_{n-1} + rb_{n-1}, \ldots, R = a_0 + rb_0$$

وهكذا نرى من العلاقات السابقة أنه يمكن الحصول علـــى كـــل المعاملات b_j لكل $j=\overline{0,n-1}$. على أية حال نجـــد أنـــه مـــن الأسهل حساب هذه المعاملات لعملية القسمة التركيبية هذه عـــن طريق التركسية الآتية:

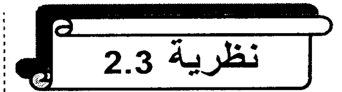
$$r\left(\begin{array}{llll} a_n & a_{n-1} & a_{n-2}\,, & \ldots + a_0 \\ & rb_{n-1} & + rb_{n-2}\,, \ldots & + rb_0 \\ \hline b_{n-1} = a_n, & b_{n-2} = a_{n-1} + rb_{n-1}, & \ldots, & (a_0 + rb_0) = R \end{array}\right.$$

مثال 2.3 باستخدام القسمة التركيبية أوجد خارج وباقي قسمة $P(x) = 3x^4 - 2x^3 + 5x^2 + x - 5$ على $x - 3$

الحل نكون الجدول الآتي

$$3\left(\begin{array}{ccccc} 3 & -2 & 5 & 1 & -5 \\ & 9 & 21 & 78 & 237 \\ \hline 3 & 7 & 26 & 79 & 232 \end{array}\right.$$

إذن خارج القسمة هو $H(x) = 3x^3 + 7x^2 + 26x + 79$ أما الباقي فهو $R = 232$.



النظرية الأساسية لعلم الجبر

إذا كانت $P(x)$ دالة كثيرة حدود من الدرجة n، حيث $n \geq 1$.
وكانت معاملاتها حقيقية أو مركبة، إذن يوجد عدد n مقدار حقيقي أو مركب r بحيث يكون $P(r) = 0$.

تفسير النظرية

يمكن تفسير النظرية في اتجاهين الأول بالنسبة إلي كثيرة الحدود، والثاني يختص بالمعادلة الجبرية.

[1] إذا كانت $P(x)$ كثيرة حدود من درجة $n>0$، وكانت معاملاتها حقيقية أو مركبة، فإنه يمكن وضعها في صورة حاصل ضرب عدد n عامل من الدرجة الأولى في الصورة الرياضية

$$P(x)=\alpha(x-r_1)(x-r_2)\cdots(x-r_n) \tag{2.8}$$

حيث $\alpha\neq 0$ هو أي ثابت. ومعنى هذا أن عدد أصفار كثيرة الحدود من درجة n هو العدد n نفسه.

[2] المعادلة $P(x)=0$ التي من الدرجة n والتي جذورها هي الأعداد $r_1,r_2,\cdots,r_n$ يمكن كتابتها على الصورة الرياضية

$$\alpha(x-r_1)(x-r_2)\cdots(x-r_n)=0 \tag{2.9}$$

حيث $\alpha\neq 0$ أي ثابت.



ليس من الضروري أن تكون أصفار كثيرة الحدود $P_n(x)$ مختلفة، فمثلاً كثيرة الحدود

$$P(x)=(x-1)(x+1)(x+2)$$

لها ثلاثة أصفار هي $1,-1,2$. أما كثيرة الحدود

$$P(x)=x^3=(x-0)(x-0)(x-0)$$

فلها أيضا ثلاثة أصفار كلها متساوية وكل منها يساوى الصفر.

وكثيرة الحدود

$$P(x)=(x-2)(x+1)^3$$

لها أربعة أصفار هي $2,-1,-1,-1$. ثلاثة منها متساوية هي -1 والرابع هو العدد 2.

مثال 2.4 أوجد المعادلة التي من الدرجة الرابعة والتي جذورها هي:

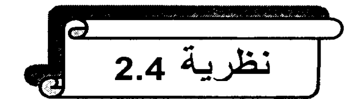
الجذر $\frac{1}{5}$، والجذران المركبان $1\pm i$ ، والجذر 3 (مكرر مرتين).

الحل باستخدام نتيجة (2.9)، نكون المعادلة المطلوبة على الصورة الرياضية

$$\alpha\left(x-\tfrac{1}{5}\right)(x-3)^2\left(x-(1+i)\right)\left(x-(1-i)\right)=0$$

نأخذ $\alpha=5$ فتحصل على

$$(5x-1)(x-3)^2\left(x^2-2x+2\right)=0$$



النظريات الآتية كلها صحيحة ويمكن إثباتها بسهولة

[1] إذا كانت $P(x)$ كثيرة حدود ذات معاملات حقيقة وكان c عدداً مركباً، وكان مرافقه هو العدد $\overline{c}$ فإن

$$P(\overline{c})=\overline{P(c)} \qquad (2.10)$$

[2] إذا كانت $P(x)=0$ معادلة كثيرة حـــدود ذات معـــاملات حقيقة وكان العدد المركب $c=a+ib$، حيث $b\neq 0$ جذراً لها فإن مرافقه $\overline{c}=a-ib$ هو أيضاً جذراً للمعادلة.

[3] إذا كانت $P(x)=0$ هي معادلة كثيرة حدود من الدرجة n ذات معاملات حقيقة، وكان n عدداً فردياً فإن $P(x)=0$ لهـــا على الأقل جذر واحد حقيقي.

✪✪✪

مثال 2.5 إذا علمت أن $1+2i$ هو أحد جذور المعادلة

$$x^4-5x^3+13x^2-19x+10=0$$

أوجد بقية الجذور.

الحل بما أن المعادلة المعطاة ذات معاملات حقيقية وأحد جذورها هـــو العدد لمركب $1+2i$. إذن فإن مرافقه $1-2i$ هو أيـــضاً جـــذر للمعادلة. إذن يمكن الحصول على الجذرين الآخربن باســـتخدام القسمة التركيبية. بما أن

$$\begin{array}{c|ccccc}
 & 1 & -5 & 13 & -19 & 10 \\
1+2i & & 1+2i & -8-6i & 17+4i & -10 \\
\hline
 & 1 & -4+2i & 5-6i & -2+4i & 0 \\
1-2i & & 1-2i & -3+6i & 2-4i & \\
\hline
 & 1 & -3 & 2 & 0 &
\end{array}$$

إذن فإن المعادلة المطلوبة هي

$$(x-(1+2i))(x-(1-2i))\left(x^2-3x+2\right)=0$$

أو

$$(x-(1+2i))(x-(1-2i))(x-1)(x-2)=0$$

وتكون الجذور الأربعة للمعادلة المعطاة هي $1+2i,\ 1-2i,\ 1,\ 2$.

تعريف 2.3 العدد الكسري والعدد غير الكسري

يسمى العدد الحقيقي r عدداً كسرياً *(Rational)* إذا أمكن وضعه على الصورة $r=\frac{a}{b}$ حيث a,b أعداداً صحيحة بدون عوامل مشتركة. وفي حالة عدم إمكانية وضع العدد r في هذه الصورة فإنه يسمى عدداً غير كسري *(Irrational)*. فمثلاً $0,\ 1,\ \frac{1}{2},\ 5$ هي أعداد كسرية أما $\sqrt{5},\ \sqrt{2}$ فهي أعداد غير كسرية.

▲▲▲

نظرية 2.5 بخصوص الجذور الصماء

إذا كان $a+\sqrt{b}$ حيث $\sqrt{b}$ عدد غير كسري جذراً لمعادلة كثيرة الحدود $P(x)=0$، فإن $a-\sqrt{b}$ يعتبر أيضاً جذراً للمعادلة.

✪✪✪

مثال 2.6 كون المعادلة ذات المعاملات الحقيقية الصحيحة والتي بعض



جذورها هي الأعداد $1+\sqrt{3}$ ،$1, \frac{1}{2}$، بشرط أن تكون درجتها أقل ما يمكن.

الحل باستخدام نظرية (2.5) فإن المعادلة المطلوبة يمكن وضعها على الصورة الرياضية

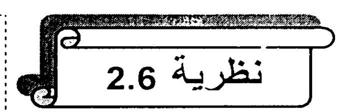
$$a_0(x-1)\left(x-\tfrac{1}{2}\right)\left(x-\left(1+\sqrt{3}\right)\right)\left(x-\left(1-\sqrt{3}\right)\right)=0$$

نأخذ $a_0 = 2$، فنحصل على

$$(x-1)(2x-1)\left(x^2-2x-2\right)=0$$

أو

$$2x^4-7x^3+11x^2-8x+2=0$$



نظرية 2.6 — **بخصوص مقلوب الجذر**

الشرط الكافي والضروري لكي يكون مقلوب أي جذر للمعادلة

$$ax^4+bx^3+cx^2+dx+e=0$$

هو أيضاً جذر هو : $a=e\ ,\ b=d$

✪✪✪

مثال 2.7 أوجد جذور المعادلة $12x^4+4x^3+-41x^2+4x+12=0$

الحل يمكن وضع هذه المعادلة على الصورة

$$12\left(x^4+1\right)+4\left(x^3+x\right)-41x^2=0$$

بالقسمة على x^2 نحصل على

$$12\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+4\left(x+\frac{1}{x}\right)-41=0$$

إذا وضعنا $y=x+\frac{1}{x}$ ، فإن $y^2=x^2+\frac{1}{x^2}+2$ وبالتالي فــإن $y^2-2=x^2+\frac{1}{x^2}$ ونحصل على

$$12\left(y^2-2\right)+4y-41=0$$

و بالتحليل نجد أن

$$(6y-13)(2y+5)=0$$

وهكذا نجد أن

$$6y-13=0 \ \text{ or } \ (2y+5)=0$$

إذن

$$6y-13=0 \ \Rightarrow \ 6\left(x+\frac{1}{x}\right)-13=0$$

أو

$$6x+\frac{6}{x}-13=0 \Rightarrow 6x^2-13x+6=0$$

وباستخدام قانون حل معادلة الدرجة الثانية نجد أن

$$x=\frac{3}{2} \quad \text{or} \quad x=\frac{2}{3}$$

أيضاً نجد أن

$$2y+5=0 \ \Rightarrow \ 2\left(x+\frac{1}{x}\right)+5=0$$

$$(2x+1)(x+2)=0 \Rightarrow x=-\frac{1}{2} \text{ or } x=-2$$

إذن الجذور الأربعة هي $2,-\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{2}$.

✍.

2.2 العلاقة بين جذور ومـــــعاملات المعادلة الجبرية

لقد اكتشف العلماء أن هناك علاقة وطيدة بين معاملات أية معادلة جبرية وجذورها. ويمكن القول أن الخواص النوعية لأيـــة معادلـــة تكمن بالدرجة الأولى في معاملاتها. لنتأمل المعادلة الجبرية من الدرجة الثالثـــة ذات الأربعـــة معـــاملات $\{a_k\}_{k=0}^{3}$ والـــتي جـــذورها r_1, r_2, r_3. هذه المعادلة يمكن وضعها في الشكل

$$(x-r_1)(x-r_2)(x-r_3)=0$$

بالضرب والفك تتحول إلى الصورة

$$x^3-(r_1+r_2+r_3)x^2+(r_1r_2+r_2r_3+r_1r_3)x-r_1r_2r_3=0$$

وبتأمل المعادلة الأخيرة نجد أن الجذور الثلاثـــة مختبـــأة في ثلاثـــة معاملات فنجد على سبيل المثال أن معامل x^2 هو سالب حاصـــل جمع الثلاثة جذور.

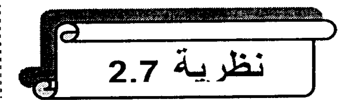
للنظر أيضاً إلى المعادلة مـــن الدرجـــة الرابعـــة والـــتي جـــذورها r_1, r_2, r_3, r_4 والتي يمكن وضعها في الشكل

$$(x-r_1)(x-r_2)(x-r_3)(x-r_4)=0$$

أو في الشكل

$$x^4-(r_1+r_2+r_3+r_4)x^3+$$
$$+(r_1r_2+r_1r_4+r_1r_3+r_2r_3+r_2r_4+r_3r_4)x^2$$
$$-(r_1r_2r_3+r_1r_2r_4+r_1r_3r_4+r_2r_3r_4)x+r_1r_2r_3r_4=0$$

لنرى العلاقة بين الجذور الأربعة والمعاملات. بصفة عامـــه يمكـــن الوصول إلى النظرية التالية



عن العلاقة بين الجذور والمعاملات

إذا كانت الفئة $\{r_i\}_{i=1}^{n}$ تكون جذور المعادلة الجبرية من الدرجـــة n المعطاة في (2.3) فإن العلاقة بين فئة الجـــذور $\{r_i\}_{i=1}^{n}$ وفئـــة المعاملات $\{a_k\}_{k=0}^{n}$ نجدها في المعادلات

$$\sum_{i=1}^{n} r_i=-\frac{a_{n-1}}{a_n},\ \sum_{\substack{i=1\\j=1\\i\neq j}}^{n} r_ir_j=\frac{a_{n-2}}{a_n},\ \cdots\ ,\ \prod_{i=1}^{n} r_i=(-1)^n\frac{a_0}{a_n} \quad (2.11)$$

✪✪✪



المعادلة (2.3) يمكن وضعهافي الصورة

$$x^n - \left(\sum_{i=1}^{n} r_i\right)x^{n-1} + \left(\sum_{\substack{i=1\\ j=1\\ i\neq j}}^{n} r_i r_j\right)x^{n-2} \qquad (2.12)$$

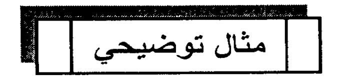
$$-\left(\sum_{i\neq j\neq k}^{n} r_i r_j r_k\right)x^{n-3} + \cdots + (-1)^n \prod_{i=1}^{n} r_i = 0$$

بقسمة المعادلة رقم (2.3) على a_n نحصل على

$$x^n + \frac{a_{n-1}}{a_n}x^{n-1} + \frac{a_{n-2}}{a_n}x^{n-2} + \cdots + \frac{a_0}{a_n} = 0 \; ; \; a_n \neq 0 \qquad (2.13)$$

وبمقارنة المعادلتين (2.13) ,(2.12)، نحصل على المعادلات (2.11).

✍.



نفرض معادلة الدرجة الثالثة

$$a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0$$

والتي جذورها هي r_1, r_2, r_3 . نجد أن مجموع الجذور هو

$$\sum_{i=1}^{3} r_i = r_1 + r_2 + r_3 = -\frac{a_{n-1}}{a_n} = -\frac{a_2}{a_3}$$

أما حاصل ضرب الجذور هو

$$\prod_{i=1}^{3} r_i = (-1)^n \frac{a_0}{a_n} \Rightarrow r_1\ r_2\ r_3 = -\frac{a_0}{a_3}$$

أيضاً نجد أن

$$\sum_{i \neq j}^{3} r_i r_j = \frac{a_{n-2}}{a_n}$$



العلاقات بين الجذور و المعاملات لا تكفي بمفردها لإيجاد جذور المعادلة ولكنها تساعد في إيجاد الجذور متى توفرت بعض المعلومات الإضافية.

مثال 2.8 أوجد جذور المعادلة $x^3 - 3x^2 - 6x + 18 = 0$ إذا علمت أن مجموع جذرين من جذورها يساوى صفراً.

الحل نفرض أن جذور المعادلة هي r_1, r_2, r_3. بما أن

$$\sum_{i=1}^{3} r_i = r_1 + r_2 + r_3 = -\frac{a_1}{a_0} = \frac{3}{1} = 3$$

وحيث أن $r_1 + r_2 = 0$، إذن $r_3 = 3$. وباستخدام القسمة التركيبية نجد أن

$$3\left(\begin{array}{cccc} 1 & -3 & -6 & 18 \\ & 3 & 0 & -18 \\ \hline 1 & 0 & -6 & (\ 0 \end{array}\right.$$

إذن المعادلة المعطاة يمكن وضعها في الصورة



$$(x-3)\left(x^2-6\right)=0$$

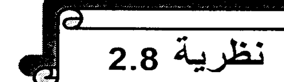
و بالتحليل نحصل على

$$(x-3)\left(x-\sqrt{6}\right)\left(x+\sqrt{6}\right)=0$$

إذن الجذور االثلاثة للمعادلة المعطاة هي $3, \sqrt{6}, -\sqrt{6}$.

2.3 الجذور المكررة

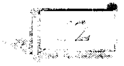
الجذور تكون عالم فسيح فتوجد الجذور الحقيقة وتوجد الجذور المركبة، توجد الجذور الصحيحة كما توجد الجذور الكسرية، توجد الجذور وتوجد مقلوباهّا، توجد الجذور غير المتشابهة، كما توجد الجذور المتشابهه أو المكررة. المهم أنه لا توجد معادلة جبرية بلا جذور مظلقاً فلكل معادلة جذورها الخاصة بها حتى ولو كانت الجذور تخيلية. بالنسبة للجذور المكررة لدينا النظرية التالية:



بخصوص الجذور المكررة

إذا كان r هو جذراً مكرراً عدد k من المرات للمعادلة $P(x)=0$ والتي من الدرجة n، فإن

[1] كثيرة الحدود $P(x)$ تقبل القسمة بدون باقي على $(x-r)^k$، أي أن



$$P(x)=(x-r)^k\,Q(x) \tag{2.14}$$

حيث $Q(x)$ هي كثيرة حدود من درجة $(n-k)$.

[2] الجذر r المكرر k من المرات للمعادلة $P(x)=0$ يكون مكرراً عدد $(k-1)$ مرة للمعادلة $P'(x)=0$، حيث $P'(x)$ هي المشتقة الأولى للدالة $P(x)$.

✪✪✪

مثال 2.9 أوجد جذور المعادلة $x^4+3x^3-6x^2-28x-24=0$ إذا علمت أن لها جذراً مكرراً ثلاث مرات.

الحل نفرض أن الجذر المكرر ثلاث مرات هو r_1 وبذلك تكون الجذور الأربعة هي r_1, r_1, r_1, r_2.

وطبقاً للنظرية (2.8) إذا كان r_1 مكرر ثلاث مرات للمعادلة $P(x)=0$، فإنه يكون مكرر مرتين للمعادلة $P'(x)=0$، ويكون جذر بسيط (جذر واحد) للمعادلة $P''(x)=0$. بما أن

$$P'(x)=4x^3+9x^2-12x-28$$

إذن

$$P''(x)=12x^2+18x-12$$

وبالتالي فإن

$$P''(x)=0 \Rightarrow (2x-1)(x+2)=0 \Rightarrow x=\frac{1}{2} \text{ or } x=-2$$

ولمعرفة أي من هذين الجذرين هو جذراً للمعادلة الأصلية نعـــوض بالقيمتين $-2, \frac{1}{2}$ في المعادلة الأصلية فمن يحققها يكون جذراً لهـــا ويستحقها. إذن $x=-2$ هو جذراً للمعادلة أما $x=\frac{1}{2}$ فهو ليس جذراً لأنه لا يحقق المعادلة الأصلية . إذن الجذر المكرر هو $x=-2$.

ولإيجاد r_2 نستخدم العلاقة

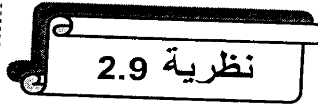
$$\sum_{i=1}^{4} r_i = -\frac{a_{n-1}}{a_n} \Rightarrow (-2)+(-2)+(-2)+r_2 = -3$$

إذن $r_2 = 3$ وتكون الجذور الأربعة هي $-2,-2,-2,3$.

✍.

2.4 الجذور الكسرية Rational Roots

أحياناً تكون الجذور على شكل كسر على شكل بسط ومقام. فهل في ذلك من الدلالات أو العلاقات التي تربط الجـــذور الكـــسرية بمعاملات المعادلو الجبرية. هذا ما سوف تجيب عنه النظرية التالية.



إذا كانت معاملات المعادلة

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_0 = 0 \; ; \; a_n \neq 0$$

أعداداً صحيحة وكان أحد جذورها هو العدد الكسري $\frac{p}{q}$، فـــإن p هو أحد عوامل a_0 بينما q هو أحد عوامل a_n.

✪✪✪





لنفرض أن $\frac{p}{q}$ هو أحد جذور المعادلة

$$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0 = 0 \; ; \; a_n \neq 0$$

إذن فهو يحققها. بوضع $x = \frac{p}{q}$ في المعادلة السابقة نحصل على

$$a_n \frac{p^n}{q^n} + a_{n-1} \frac{p^{n-1}}{q^{n-1}} + \cdots + a_1 \frac{p}{q} + a_0 = 0$$

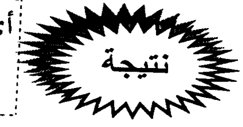
بنقل الحد الأخير إلي الطرف الأيمن نحصل على

$$a_n \frac{p^n}{q^n} + a_{n-1} \frac{p^{n-1}}{q^{n-1}} + \cdots + a_1 \frac{p}{q} = -a_0$$

بضرب الطرفين في q^n وأخذ p عامل مشترك نجد أن

$$p\left(a_n p^{n-1} + a_{n-1} p^{n-2} q + \cdots + a_1 q^{n-1}\right) = -a_0 q^n$$

حيث أن كل الأعداد الموجودة داخل القوسين هي أعداد صحيحة، إذن p هو عامل للمقدار $a_0 q^n$ وبالتالي يكون عامل للمعامل a_0، حيث أنه ليس عاملاً للعدد q. بالمثل يمكن إثبات أن q هو عامل للمعامل a_n.



أي جذر كسري للمعادلة التي على الصورة

$$x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0 = 0$$

والتي جميع معاملاتها أعداداً صحيحة حيث $a_n = 1$، يكون عاملاً للعدد a_0، وذلك لأنه إذا كان $\frac{p}{q}$ جذراً للمعادلة وكان $a_n = 1$،

فحسب النظرية (2.8)، فإن q يكون عاملاً للعدد a_n، وبالتالي فإن $q = \pm 1$ ويصبح الجذر على الصورة $\frac{p}{\pm 1}$ أو ببساطة $\pm p$.

مثال 2.10 أوجد الجذور الكسرية ثم جميع جذور المعادلة

$$3x^3 + 2x^2 - 3x - 2 = 0$$

الحل الجذور الكسرية لهذه المعادلة تكون على الصورة $\frac{p}{q}$، حيث q عامل للعدد $a_n = 3$ بينما p عامل للعدد $a_0 = 2$ وبالتالي فإن

$$q = \pm 1 \text{ or } q = \pm 3, \quad p = \pm 1 \text{ or } p = \pm 2$$

إذن الجذور المتوقعة على الشكل $\frac{p}{q}$ هي

$$\pm 1, \pm 2, \pm \frac{1}{3}, \pm \frac{2}{3}$$

نستخدم الآن طريقة التجربة والخطأ *(Trial and error)* لمعرفة أي هذه الأعداد تعتبر جذوراً كسرية ولنبدأ بالعدد 1. باستخدام القسمة التركيبية نجد أن

$$1 \left(\begin{array}{cccc} 3 & 2 & -3 & -2 \\ & 3 & 5 & 2 \\ \hline 3 & 5 & 2 & 0 = p(1) \end{array} \right.$$

إذن العدد 1 هو أحد الجذور والجذران الباقيان هما جذرا المعادلة $3x^2+5x+2=0$ التي من الدرجة الثانية. بما أن

$$3x^2+5x+2=0 \Rightarrow (3x+2)(x+1)=0$$

إذن جذرا هذه المعادلة هما $x=-1,\ x=-\frac{2}{3}$ وبالتالي فالجذور الثلاثة للمعادلة المعطاة هي $1,-1,-\frac{2}{3}$.

2.5 الطرق التقريبية لإيجاد الجذور

الطرق السابقة لإيجاد الجذور تساعد في الحصول على الجذور المضبوطة *(Exact)* للمعادلة الجبرية. وعندما لا نستطيع الحصول على الجذور المضبوطة فإننا نحاول الحصول على الجذور التقريبية *(Approximate)* أي تلك التي تقترب *(Close to)* من الجذور المضبوطة. وهناك الكثير من الطرق التي تساعد في الحصول على الجذور التقريقبية نقدم منها الطريقيتين التاليتين.

الطريقة البيانية

وهذه الطريقة تعتمد على تقسيم المعادلة بطريقة تسمح بالحصول منها على دالتين، ثم نرسم منحني كل من التين فيكون الجذر هو الإحداثي السيني لنقطة تقاطعهما.

نظرية 2.10 الطريقية البيانية لإيجاد الجذور

إذا كانت $P(x)=0$ معادلة كثيرة حدود بحيث يمكن كتابتها على الصورة الرياضية $f(x)=g(x)$ ، فإن نقط تقاطع منحنى الدالـــة $y=f(x)$ مع منحنى الدالة $y=g(x)$ تكون جذور للمعادلـــة $P(x)=0$.

✪✪✪



لنفرض أن إحدى نقـــط تقـــاطع المنحنـــيين $y=g(x), y=f(x)$ هي (x_0,y_0). إذن فالنقطة (x_0,y_0) تحقق كلٌ من المعادلتين

$$y=g(x) \ \& \ y=f(x)$$

إذن فإن

$$y_0=g(x_0) \ \& \ y_0=f(x_0)$$

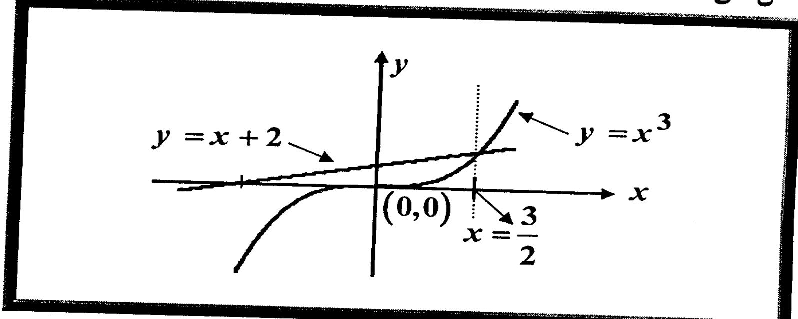
وعلى ذلك فإن $g(x_0)=f(x_0)$. ومنها نجـــد أن $p(x_0)=0$.
لاحظ أن $p(x)=f(x)-g(x)$. وتكون الجذور الحقيقية للمعادلة هي الإحداثيات السينية لنقط التقاطع.

مثال 2.11 أوجد الجذور الحقيقية للمعادلة $x^3-x-2=0$.

الحل هذه المعادلة يمكن أن تأخذ الصورة $x^3=x+2$. نرسم منحنى

كل من الدالتين $y=x+2$,$y=x^3$ كما في شكل (2.1).

شكل 2.1

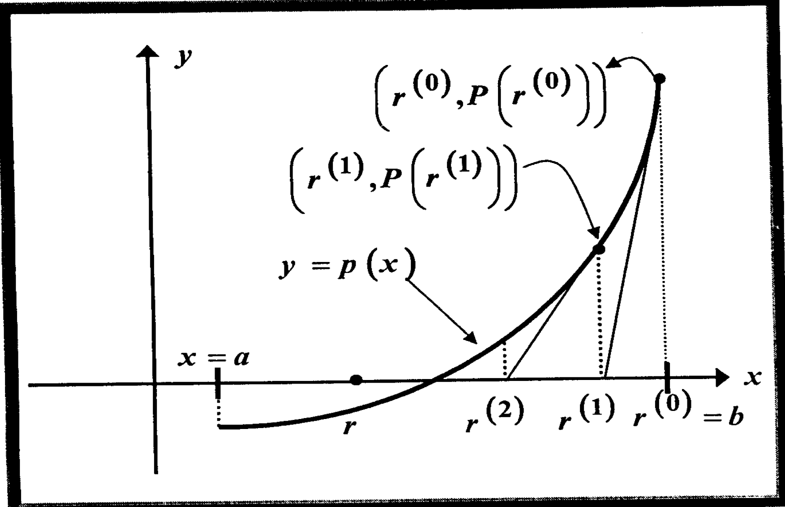


نرى من الرسم أن المنحنيين يتقاطعان في نقطة واحدة، الإحداثي السيني لها هو $x=\frac{3}{2}$ وعلى ذلك فللمعادلة المعطاة جذراً حقيقياً واحداً هو $x=\frac{3}{2}$. و حيث أن دقة الرسم تؤدى إلي دقة قيمة الجذر، إذن فمن الأفضل أن نقول أن الجذر يقع بين العددين 1, 2.

طريقة نيوتن

لتعتبر أن $P(x)$ هي دالة كثيرة حدود متصلة على الفترة المغلقة $[a,b]$، بحيث يكون $f(b)>0, f(a)<0$. ولنفرض أن r هو أحد جذور المعادلة $P(x)=0$ بحيث يكون $a<r<b$. انظر شكل (2.2).





لقد افترضنا أن الجذر الذي نبحث عنه هو أي عدد محـــصور بـــين العددين a,b فإذا أخذ الجذر أياً من القيمتين a,b أمكن اعتبـــار هذه القيمة بمثابة قيمة تقديرية (تقريبية للجذر) يرمز لها بالرمز $r^{(0)}$ وتسمى التقريب الصفري للجذر. لنفرض ــ مثلاً ــ أن

$$r^{(0)} = b$$

ثم نرسم مماس لمنحنى الدالة $P(x)$ عند النقطة $\left(r^{(0)}, P\left(r^{(0)}\right)\right)$ فيكون الإحداثي السيني ــ يرمز له في هذه الحالـــة بـــالرمز $r^{(1)}$ ويسمى التقريب الأول ــ لنقطة تقاطع المماس مع محور ــ x أقرب إلي الجذر r أكثر من قرب $r^{(0)}$ ، ولـــذلك نأخـــذ $r^{(1)}$ بمثابـــة

التقريب الأول. وبما أن المشتقة الأولى للدالة $P(x)$ عند النقطة $r^{(0)}$ ما هي إلا ميل المماس عند النقطة $r^{(0)}$. انظر شكل (2.2).

إذن فإن

$$P'\left(r^{(0)}\right)=\frac{P\left(r^{(0)}\right)}{r^{(0)}-r^{(1)}}$$

أو

$$r^{(1)}=r^{(0)}-\frac{P\left(r^{(0)}\right)}{P'\left(r^{(0)}\right)}$$

وبالاستمرار في محاولة تحسين الجذر ليقترب من القيمة الفعلية باستخدام نفس التكنيك يمكن الحصول على التقريب الثاني $r^{(2)}$ وذلك برسم مماس للدالة $P(x)$ عند النقطة $\left(r^{(1)},P\left(r^{(1)}\right)\right)$ فتكون نقطة التقاطع مع محور-x هي $r^{(2)}$ وهي بالتأكيد أقرب إلي الجذر r من كل من $r^{(0)},r^{(1)}$. ونستمر في هذه الطريقة حتى نحصل على التقريب الثالث ثم الرابع ولا نتوقف حتى نحصل على التقريب المناسب لقيمة الجذر r إلي أي درجة مطلوبة من الدقة.

وبصفة عامة، فإن

$$r^{(n)} = r^{(n-1)} - \frac{P\left(r^{(n-1)}\right)}{P'\left(r^{(n-1)}\right)}$$

ملاحظات

عند تطبيق طريقة نيوتن
يجب مراعاة الآتي :

[1] عدم وجود نهايات عظمى أو صغرى أو نقط انقلاب في الفترة $[a,b]$ وذلك حتى لا تكون $r^{(1)}$ أكثر بعداً عن r من $r^{(0)}$ ولذلك يجب أن لا تتغير إشارة كل من $P'(x), P''(x)$ في الفترة $]a,b[$.

[2] من الأفضل اختيار التقريب الصفري عند النقطة التي تكون عندها إشارتا كل من $P(x), P''(x)$ متشابهتين.

مثال 2.12 استخدم طريقة نيوتن لإيجاد أصغر الجذور الموجبة للمعادلة

$$x^3 - 4x + 2 = 0$$

حتى ثلاثة أرقام عشرية.

الحل بما أن $P(x) = x^3 - 4x + 2$ ، إذن $P(1) = -1, P(0) = 2$

إذن يوجد على الأقل جذراً واحداً r ، حيث $r \in]0,1[$. أيضاً بما أن

$$P'(x) = 3x^2 - 4 \Rightarrow P''(x) = 6x$$

نكون الجدول:

الفترة	المشتقة الأولى	المشتقة الثانية
$]0,1[$	$P'(x)=3x^2-4<0$	$P''(x)=6x>0$

أي أن إشارة كل من $P''(x), P'(x)$ لا تتغير في الفترة $]0,1[$ وبالتالي لا توجد نقط قيم عظمى أو صغرى محلية ولا توجد نقط انقلاب داخل الفترة $]0,1[$. إذن يمكن تطبيق طريقة نيوتن. نختار العدد الذي يجعل إشارة $P(x)$ مثل إشارة $P''(x)$ وذلك لسرعة الاقتراب من الجذر الحقيقي. بما أن

$$P(0)=2, P''(0)=0$$

إذن نختار $r^{(0)}=0$ ويكون التقريب الأول هو

$$r^{(1)}=r^{(0)}-\frac{P\left(r^{(0)}\right)}{P'\left(r^{(0)}\right)}=0-\frac{P(0)}{P'(0)}=-\frac{2}{-4}=0.5$$

التقريب الثاني هو

$$r^{(2)}=0.5-\frac{P(0.5)}{P'(0.5)}\approx 0.54$$

التقريب الثالث هو

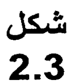
$$r^{(3)}=0.54-\frac{P(0.54)}{P'(0.54)}\approx 0.54082$$

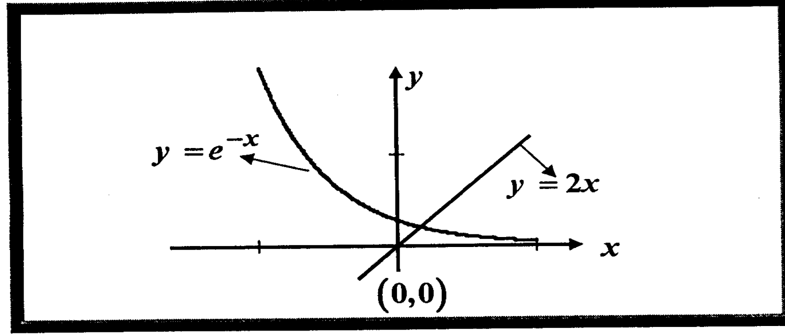
إذن أصغر الجذور لثلاثة أرقام عشرية هو 0.541 .

مثال 2.13 استخدم طريقة نيوتن للحصول على جذور المعادلة

$$2x - e^{-x} = 0$$

الحل نرسم منحنى كل من الدالتين $y = e^{-x}$, $y = 2x$ فنجد من الرسم أنه يوجد جذر واحد حقيقي في الفترة $]0,1[$. انظر شكل (2.3).


شكل 2.3



نضع

$$P(x) = 2x - e^{-x}$$

إذن

$$P'(x) = 2 + e^{-x} \Rightarrow P''(x) = -e^{-x}$$

نكون الجدول:

الفترة	المشتقة الأولى	المشتقة الثانية

$]0,1[$	$P'(x)=2+e^{-x}>0$	$P''(x)=-e^{-x}<0$

إذن نجد أن إشارة كل من $P''(x), P'(x)$ لا تتغير في الفترة $]0,1[$. أيضاً، بما أن إشارة كل من $P(0.3), P''(0.3)$ سالبة في الفترة $]0,1[$، إذن نختار العدد 0.3 على أنه التقريب الصفري.

ويكون التقريب الأول هو

$$r^{(1)}=r^{(0)}-\frac{P\left(r^{(0)}\right)}{P'\left(r^{(0)}\right)}=0.3-\frac{P(0.3)}{P'(0.3)}\approx 0.351$$

التقريب الثاني هو

$$r^{(2)}=0.351-\frac{P(0.351)}{P'(0.351)}\approx 0.352$$

ونستمر في التقريب حتى يثبت ثالث رقم عشري.

2.6 مسائل

[1] بين أن $P(x)=x^4+4x^3+6x^2-8$ تقبل القسمة على $x+2$.

[2] حل المعادلة $x^3-3x^2-6x+8=0$ إذا علم أن جذورها تكون متوالية عددية.

[3] أوجد الكميات $\sum_{i=1}^{4} r_i^2, \sum_{i\neq j}^{4} r_i^2 r_j$ إذا كانت r_1, r_2, r_3, r_4 هي جذور المعادلة $x^4 - 6x^3 + 8x + 12 = 0$.

[4] إذا كانت r_1, r_2, r_3 هي جذور المعادلة $x^3 + px + q = 0$ أوجد بدلالة المعاملات كل من $\sum_{i=1}^{4} r_i^4, \sum_{i=1}^{4} r_i^3, \sum_{i=1}^{3} r_i^2$.

[5] أوجد الجذور الكسرية، ومن ثم أوجد بقية الجذور لكل من المعادلتين

$$x^4 - 6x^3 + 3x^2 + 24x - 28 = 0$$

$$3x^4 - 8x^3 + 7x^2 - 8x + 4 = 0$$

[6] أوجد بيانياً الجذور الحقيقية للمعادلات الآتية

$$x^2 - x - 2 = 0,\ x - 2\sin(x) = 0,\ x^3 - 4x + 4 = 0$$

[7] استخدم طريقة نيوتن لإيجاد جذر واحد لكل من المعادلات الآتية

$$x - 2\sin(x) = 0,\quad \ln(x) = 2 - x,\ x^3 - 2x - 1 = 0$$

****

3 المصفوفات والمحددات

MATRICES and Determinants

ندرس في هذا الباب المصفوفات *(matrices)* كواحدة من أهم الموضوعات الرياضية التي ظهرت في القرن الثامن عشر. ومن المرجح أنه قد عرف المصطلح الرياضي مصفوفة *(matrix)* لأول مرة على يد عالم الرياضيات الإنجليزي المعروف سيلفستير *(Sylvester J. J., 1814 -1897)*. وقد ساهم علم المصفوفات في إحداث تطور مذهل في علم الرياضيات نفسه بالإضافة إلى العلوم التطبيقية الأخرى. هذا، ويمكن اعتبار علم المصفوفات بمثابة علم الترتيب، فكل العناصر الموجودة في هذا الكون الذي نحيا مرتبة ترتيباً غاية في الدقة. وكل ترتيب له الكثير من المعاني العظيمة وله قيمته التي تميزه عن أي ترتيب آخر بحيث يكون لكل ترتيب معين قيمة (غير جبرية) يتميز بها عن غيره من الترتيبات الأخرى كما سنرى في باب القيم المميزة *(Eigenvalues)* والمتجهات المميزة *(Eigenvectors)*. شكراً لعلم المصفوفات الذي مكن الإنسان من ترتيب نظم المعادلات الجبرية *(Algebriac Systems)* بالطريقة التي ساعدته على الحصول على حلولها بسهولة ويسر كما سنرى في البابين الخامس والسادس.

3.1 مقدمة عن المصفوفات

في هذا الفصل نتعرف على معني المصفوفة، وأشكالها المختلفة وأنواعها وصفات وخصائص كل نوع ، وكذلك، العمليات الرياضية التي يمكن أن تخضع لها مثل الجمع والطرح والضرب.

تعريف 3.1 | **المصفوفة – Matrix**

تُعرف المصفوفة على أنها ترتيب معين من الأشياء على شكل صفوف *(rows)* وأعمدة *(columns)*.

▲▲▲

ويستخدم للدلالة على المصفوفة القوسين ( ) أو [ ]، كما تستخدم الحروف الكبيرة والثقيلة *(Bold)* للتعبير عن المصفوفات أما الحروف الصغيرة فتستخدم للتعبير عن عناصر المصفوفة كما سنرى. فمثلاً فإن

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

هي مصفوفة تتكون من عدد m من الصفوف وعدد n من الأعمدة. وفي شكل رياضي مختصر يمكن أن تكتب هذه المصفوفة في الشكل

$$A=\left[a_{ij}\right]\ ;\ i=\overline{1,m}\ ,\ j=\overline{1,n}$$

حيث يرمز a_{ij} إلى عناصر المصفوفة *(entries)*، بينما يرمز i لرقم الصف أما j فيعبر عن رقم العمود. القطر الذي تقع عليه العناصر $a_{11}, a_{22}, a_{33}.., a_{mn}$ يسمى "القطر الرئيسي *(main diagonal)*"، كما تسمى العناصر التي تقع على هذا القطر "عناصر القطر الرئيسي للمصفوفة".

تعريف 3.2 رتبة المصفوفة Order of a Matrix

رتبة أية مصفوفة تُعرف على أنها عدد الصفوف مضروباً في عدد الأعمدة.

▲▲▲

فمثلاً فإن رتبه المصفوفة $A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 4\\ 0 & 0 & -1\end{bmatrix}$ هي 2×3. أما المصفوفة $B=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 2 & 0\\ 4 & -1\end{bmatrix}$ فرتبتها هي 3×2. صحيح أن عدد عناصر أي من المصفوفتين A,B يساوي 6 عناصر إلا أن ترتيب عناصر المصفوفة A مختلف عن ترتيب عناصر المصفوفة B. وبالتالي فالرتب مختلفة.

تعريف 3.3 المصفوفات المتساوية Equal Matrices

يقال أن المصفوفتين $A=\left(a_{ij}\right), B=\left(b_{ij}\right)$ متساويتان إذا وفقط

إذا كانتا من نفس الرتبة وكان $a_{ij} = b_{ij}$ لكل $i = \overline{1,m}\ \&\ j = \overline{1,n}$.

▲▲▲

بمعنى أن العناصر المتناظرة تكون متساوية. فمثلاً لا يمكن جمع المصفوفتين A, B كما في تعريف 3.2 بسبب اختلافهما في الرتبة بينما يمكن جمع المصفوفتين C, D — مثلاً — وذلك بسبب تساويهما في الرتبة حيث رتبه أي منهما هي 2×3 فنجد أن

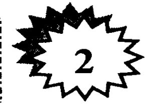
$$C = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 9 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow C + D = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 9 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

3.2 أنواع المصفوفات - Types of Matrices

توجد أنواع كثيرة من المصفوفات تختلف عن بعضها في الصفات والخواص والرتبة، والمرتبة *(rank)* — كما سنتعرف عليها لاحقاً — وغيرها من الصفات، نقدم بعضها في هذا الفصل.

1 المصفوفة المربعة (Square Matrix)

إذا كان عدد صفوف المصفوفة يساوي عدد أعمدتها، أي أنه إذا كان $m = n$ فإنه يقال أن المصفوفة مربعة. على سبيل المثال فإن المصفوفة $C = \begin{bmatrix} 0 & 9 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$ هي مصفوفة مربعة من الرتبة 2×2.



مصفوفة الصف (Row Matrix)

إذا كانت المصفوفة تتكون من صف واحد فقط $(m=1)$، بغض النظر عن عدد الأعمدة فإن المصفوفة تسمى مصفوفة الصف. فمثلاً المصفوفة $\begin{bmatrix} 8 & 4 & 12 & 2 \end{bmatrix}$ هي مصفوفة صف من الرتبة 1×4.

3

مصفوفة العمود (Column Matrix)

إذا كانت المصفوفة تتكون من عمود واحد فقط $(n=1)$، بغض النظر عن عدد الصفوف فإن المصفوفة تسمى مصفوفة عمود. فمثلاً المصفوفة $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$ هي مصفوفة عمود من الرتبة 3×1.

4

المصفوفة القطرية (Diagonal Matrix)

هي مصفوفة مربعة كل عناصرها غير القطرية صفرية، أي أن العناصر الواقعة فوق أو أسفل القطر الرئيسي أصفار. أي أن $\alpha_{ij}=0 \quad \forall \quad i\neq j$. تجدر الإشارة إلى أنه في معظم الأحيان يعبر عن مثل هذه المصفوفات القطرية في الصورة $A=\operatorname{diag}(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\ldots,\alpha_n)$ حيث α_{ij} هي عناصر القطر الرئيسي للمصفوفة A. فعلى سبيل المثال فإن المصفوفات الآتية كلها مصفوفات قطرية:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -8 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 20 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

بينما المصفوفات الآتية كلها غير قطرية

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 20 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

5 المصفوفة الصفرية (Zero Matrix)

هي مصفوفة من أية رتبة بشرط أن تكون كل عناصرها أصفار.

فمثلاً المصفوفات الآتية هي مصفوفات صفرية من رتب مختلفة:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

6 مصفوفة الوحدة (Unit Matrix)

هي مصفوفة قطرية عناصرها القطرية كلها متساوية وكل منها يساوى الوحدة. وعادة يرمز لمصفوفة الوحدة من الرتبة n بالرمز I_n. فمثلاً المصفوفات الآتية هي مصفوفات وحدة

$$I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, I_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

7 المصفوفة الموسعة (Augmented Matrix)

تُعرف المصفوفة الموسعة ويرمز لها بالرمز $[A|B]$ على أنها مصفوفة من الرتبة $m \times (n+1)$ و تتألف من المصفوفة A من الرتبة $m \times n$ وعن يمينها المصفوفة B من الرتبة $m \times 1$ كمصفوفة إضافية. على سبيل المثال فإن

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 5 \\ 6 \end{bmatrix} \Rightarrow [A|B] = \left[\begin{array}{cc|c} 3 & 2 & 5 \\ 2 & 0 & 6 \end{array}\right]$$



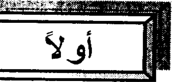
8 مدورة المصفوفة (Transpose Matrix)

هي المصفوفة التي نحصل عليها بجعل الصفوف أعمدة أو بجعل الأعمدة صفوف. فإذا كانت A ــ مثلاً ــ مصفوفة من الرتبة $m \times n$ فإن مدورة المصفوفة A ويرمز لها بالرمز A^t تكون من الرتبة $n \times m$. بمعنى أن

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 9 \end{bmatrix} \Rightarrow A^t = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \\ 4 & 9 \end{bmatrix}$$

3.3 العمليات الجبرية على المصفوفات

المصفوفة مثلها مثل أي كائن رياضي آخر تخضع لعمليات جبرية.
بيد أن العمليات الجبرية على المصفوفات تختلف عن العمليات الجبرية للكائنات الرياضية الأخرى مثل الدوال المثلثية أو الدوال الأسية وغيرها.
في هذا الفصل نقدم بعض العمليات الجبرية التي تجرى على المصفوفات مثل الجمع والطرح والضرب، وضرب المصفوفة في عدد قياسي.



الضرب القياسي - Scalar Multiplication

لنعتبر المصفوفة
$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$
من الرتبة $m \times n$ والمعرفة على مجال العداد الحقيقية R مثلاً، و لنفرض أن α هو أي عنصر من عناصر المجال R، إذن فإن

$$\alpha A = \begin{bmatrix} \alpha a_{11} & \alpha a_{12} & \cdots & \alpha a_{1n} \\ \alpha a_{21} & \alpha a_{22} & \cdots & \alpha a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \alpha a_{m1} & \alpha a_{m2} & \cdots & \alpha a_{mn} \end{bmatrix}$$

أي أن المصفوفة αA هي المصفوفة التي تنتج عن ضرب كل عنصر

من عناصر المصفوفة A في العدد α .

ثانياً جمع وطرح المصفوفات

في عالم الأعداد لا توجد شروط لعمليات الجمع (الطرح) إلا أن تكون الأعداد من نفس المجال. في عالم المصفوفات يوجد شرط آخر بخلاف هذا الشرط وهو أن تكون المصفوفات المراد جمعها (طرحها) من نفس الرتبةز وتتم عملية الجمع بجمع العناصر المتناظرة في كل منهما. أي أنه إذا كانت هناك المصفوفتان $A=\left[a_{ij}\right], B=\left[b_{ij}\right]$ من الرتبة $m\times n$ حيث $i=\overline{1,m}\ \&\ j=\overline{1,n}$، وكانت المصفوفة $C=\left[c_{ij}\right]$ هي حاصل جمع المصفوفتين $A=\left[a_{ij}\right], B=\left[b_{ij}\right]$. إذن فإن المعادلة $C=A+B$ تعني أن

$$c_{ij}=a_{ij}+b_{ij}\quad \forall\ i=\overline{1,m}\ ,\ j=\overline{1,n}$$

فإذا كانت هناك المصفوفتان $A=\left[a_{ij}\right], B=\left[b_{ij}\right]$ من الرتبة $m\times n$ حيث $i=\overline{1,m}\ \&\ j=\overline{1,n}$، وكانت المصفوفة $C=\left[c_{ij}\right]$ هي حاصل طرح المصفوفتين $A=\left[a_{ij}\right], B=\left[b_{ij}\right]$.
إذن فإن المعادلة $C=A-B$ تعني أن

$$c_{ij}=a_{ij}-b_{ij}\quad \forall\ i=\overline{1,m}\ ,\ j=\overline{1,n}$$

مثال 3.1

أوجد $A+B, A-B$ إذا كان

$$A=\begin{bmatrix}1 & 4 & -9\\ 6 & 3 & 8\\ 4 & -7 & 5\end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix}0 & -9 & 8\\ 8 & 4 & 0\\ 1 & -3 & 2\end{bmatrix}$$

الحل

$$A+B=\begin{bmatrix}1 & -5 & -1\\ 14 & 7 & 8\\ 5 & -10 & 7\end{bmatrix}, A-B=\begin{bmatrix}1 & 13 & -17\\ -2 & -1 & 8\\ 3 & -4 & 3\end{bmatrix}$$

✍.

مثال 3.2

أوجد $C+D$ إذا كان

$$C=\begin{bmatrix}11 & 2 & -9\\ 6 & 6 & 4\\ 4 & -7 & 0\end{bmatrix}, D=\begin{bmatrix}1 & 2\\ -7 & 3\\ 8 & 5\end{bmatrix}$$

الحل لا يمكن إجراء عملية الجمع و ذلك لاختلاف الرتب. فالمصفوفة C رتبتها هي 3×3 بينما رتبة المصفوفة D هي 3×2.

✍.

نظرية ـ 3.1

الصفات والخصائص التالية لجمع المصفوفات كلها صحيحة ويمكن إثباتها بسهولة

[1] عملية جمع المصفوفات هي عملية تبديلية *(Commutative)*.

أي أنه إذا كانت A,B مصفوفتان من نفس الرتبة فإن $A+B=B+A$ فإذا كان

$$A=\begin{bmatrix}3&0\\4&8\end{bmatrix},B=\begin{bmatrix}9&-1\\0&0\end{bmatrix}$$

فإن

$$A+B=\begin{bmatrix}3&0\\4&8\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}9&-1\\0&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}12&-1\\4&8\end{bmatrix};$$

$$B+A=\begin{bmatrix}9&-1\\0&0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}3&0\\4&8\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}12&-1\\4&8\end{bmatrix}=A+B$$

[2] عملية جمع المصفوفات هي عملية إدماجية *(Associative)*. أي

أن $(A+B)+C=A+(B+C)$

وكمثال على ذلك إذا كان

$$A=\begin{bmatrix}2&1\\4&7\end{bmatrix},B=\begin{bmatrix}5&-1\\0&7\end{bmatrix},C=\begin{bmatrix}0&1\\9&7\end{bmatrix}$$

فإن

$$(A+B)+C=\begin{bmatrix}7&0\\4&14\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0&1\\9&7\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}7&1\\13&21\end{bmatrix}$$

كما أن

$$A+(B+C)=\begin{bmatrix}2&1\\4&7\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}5&0\\9&14\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}7&1\\13&21\end{bmatrix}$$

✪✪✪



ضرب المصفوفات
Multiplication of Matrices

المصفوفات أيضاً يمكن ضربها في بعضها البعض ولكن ليس كما

تضرب الأعداد وإنما بطريقة أخرى غير أن ضرب المصفوفات أيضاً له شروط لكي يمكن من تنفيذه. لتكن A,B مصفوفتان على نفس المجال بشرط أن

عدد أعمدة المصفوفة A = عدد صفوف المصفوفة B

حيث $m \times n$ هي رتبة المصفوفة A، بينما $n \times p$ هي رتبة المصفوفة B. إذن فإن عملية ضرب المصفوفة A في المصفوفة B تُعرف على أنها المصفوفة C من الرتبة $m \times p$ أي أن

$$\underset{m\times n}{A} \times \underset{n\times p}{B} = \underset{m\times p}{C}$$

<u>خطوات عملية ضرب المصفوفات:</u>

[1] ضرب الصف الأول من A في العمود الأول من B (كل عنصر في الصف الأول من A يضرب في العنصر المناظر له في العمود الأول من B). **[2]** يتم جمع حاصل الضرب في الخطوة رقم **[1]** ويوضع الناتج في مكان العنصر الأول في الصف الأول من المصفوفة C . **[3]** يضرب الصف الأول من A في العمود الثاني من B (كل عنصر في الصف الأول من A يضرب في العنصر المناظر له في العمود الثاني من B). **[4]** نكرر الخطوة رقم **[2]**. **[5]** يوضع ناتج الخطوة رقم **[4]** مكان العنصر الثاني في الصف الأول من المصفوفة C. **[6]** نكرر الخطوات السابقة حتى يتم ضرب الصف الأول من A في الأعمدة الباقية من B، فنحصل

على الصف الأول من المصفوفة C. [7] يتم ضرب الصف الثاني من A في العمود الأول B، ثم في العمود الثاني وهكذا حتى آخر عمود ثم نكرر الخطوات السابقة حتى نحصل على المصفوفة C.

مثال 3.3 أوجد حاصل الضرب AB إذا كان

$$A=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 0 & 4\\ 7 & -5\end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 0 & 4\end{bmatrix}$$

الحل نلاحظ أن رتبة المصفوفة A هي 3×2، ورتبة المصفوفة B هي 2×2، إذن عدد الأعمدة في A يساوي عدد الصفوف في B وبذلك يتحقق شرط إجراء عملية الضرب حيث نحصل على المصفوفة C من الرتبة 3×2. إذن

$$AB=\begin{bmatrix}1\times 1+2\times 0 & 1\times 2+2\times 4\\ 0\times 1+4\times 0 & 0\times 2+4\times 4\\ 7\times 1-5\times 0 & 7\times 2-5\times 4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 10\\ 0 & 16\\ 7 & -6\end{bmatrix}$$

نظرية – 3.2

الصفات والخصائص التالية لضرب لمصفوفات كلها صحيحة ويمكن إثباتها بسهولة

[1] ضرب المصفوفات ليست عملية تبديلية (طالما كان الضرب ممكناً)، أي أن

$$AB\neq BA$$

[2] ضرب المصفوفات عملية ادماجية، (طالما كان الضرب ممكناً) أي أن

$$(AB)\,C=A\,(BC)$$

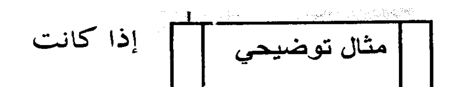
[3] لأية ثلاث مصفوفات A,B,C قابلة لعمليات الجمع والضرب فإن

$$A(B+C)=AB+AC,\quad (B+C)A=BA+CA$$

✪✪✪

3.4 عمليات الصف البسيطة والمصفوفة المختزلة

عمليات الصف البسيطة على المصفوفات هي عبارة عن بعض العمليات الجبرية كالجمع، والطرح، والضرب نجريها على صفوف المصفوفة للحصول على مصفوفة صف مكافئة لها بغرض تبسيطها. نعرض الآن لثلاث عمليات رياضية على الصف لأية مصفوفة. هذه العمليات الرياضية تلعب دوراً هاماً في استخدامات المصفوفات، وهذه العمليات الثلاث هي: [1] تبديل أي صف بأي صف. [2] ضرب أي صف في أي عدد قياسي *(scalar)* غير صفري. [3] ضرب أي صف في أي عدد قياسي *(scalar)* غير صفري وجمعه مع أي صف آخر.



إذا كانت

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 6 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & -3 & 4 \end{bmatrix}$$

فإنه يمكن تطبيق عمليات الصف البسيطة السابقة على المصفوفة A لنحصل على المصفوفات المكافئة لها مثل المصفوفات B,C,W

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \\ -2 & 1 & 6 \\ 2 & -3 & 4 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 6 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 4 & -6 & 8 \end{bmatrix}, W = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 6 \\ 1 & 6 & 17 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & -3 & 4 \end{bmatrix}$$

حيث حصلنا على المصفوفة B بتبديل الصف الأول مكان الثالث في المصفوفة A ، وحصلنا على المصفوفة C بضرب كل عنصر من عناصر الصف الرابع في المصفوفة A في العدد 2 ، كما حصلنا على المصفوفة W بضرب الصف الثالث في المصفوفة A في العــدد 5 وجمعه على الصف الثاني. مما سبق فإن المصفوفة A تسمى مصفوفة صف مكافئة للمصفوفات B,C,D .

<u>لاحــظ</u> أن مصفوفة الصف المكافئة تكافيء المصفوفو الأصلية ولكنها لا تساويها.

تعريف 3.4

مصـــفوفة الصف المكافئة
Row Equivalent Matrix

هي المصفوفة التي نحصل عليها بعد إجراء بعض عمليـــات الـــصف البسيطة عليها.

▲▲▲

نظرية ـ 3.3

الخصائص الآتية للمصفوفات المكافئة كلها صحيحة ويمكن إثباتها بسهولة

[1] كل مصفوفة هي مصفوفة صف ــ مكافئـــة لنفـــسها. [2] إذا كانت A هي مصفوفة صف ــ مكافئة للمصفوفة B، فإن B هي مصفوفة صف ــ مكافئة للمصفوفة A. [3] إذا كانـــت A هـــي مصفوفة صف مكافئة للمصفوفة B، وكانت B هي مصفوفة صف ــ مكافئة للمصفوفة C، فإن A هي مصفوفة صـــف ــ مكافئـــة للمصفوفة C.

✪✪✪

3.5 المصفوفة المختزلة – Reduced Form of a Matrix

من روائع علم المصفوفات ما يسمى المصفوفة المختزلة وهي عبـــارة مصفوفة أخرى معظم عناصرها أصفار أو وحدات. وهي تكـــافيء المصفوفة الأصلية. والمصفوفة المختزلة لا تساوي المصفوفة الأصلية وإنما تكافئها. فكيف نحصل عليها؟ دعنا نتعرف أولاً على تركيبتها وشكلها حتى يسهل علينا الحصول عليها.

تعريف 3.5

مصـــفوفة الصف المكافئة
Row Equivalent Matrix

المصفوفة A_R التي من الدرجـة $m \times n$ تـسمى "المصفوفة المختزلة" للمصفوفة A إذا كانت تحقق الشروط الأربعة الآتية: [1] أول عنصر غير صفري في أي صف هو الواحد الصحيح وهذا العنصر يسمى الدليل *(Leading Entry)*. [2] إذا كان أول عنصر غير صفري في الصف رقم r يقع في العمود رقم c، إذن فجميـع العناصر الأخرى في العمود رقم c هي أصفار. [3] الصف الـذي كل عناصره أصفار يقع أسفل الصف الذي يحتوى على عناصر غير صفرية. [4] إذا كان أول عنصر غير صفري في الصف رقم r_1 يقع في العمود رقم c_1 وكان أول عنصر غير صفري في الصف رقم r_2 يقع في العمود c_2 بحيث $r_1 < r_2$، إذن فإن $c_1 < c_2$.

▲▲▲

فمثلاً المصفوفات الآتية كلها في الشكل المختزل

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

أما المصفوفات

$$A=\begin{bmatrix}1&2&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix},B=\begin{bmatrix}1&0\\0&0\\0&1\end{bmatrix},C=\begin{bmatrix}0&4&2&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}$$

فليست كلها مختزلة. في المصفوفة A فإن أول عنصر غير صفري في الصف الثاني يقع في العمود الثاني وهذا العمود الثاني ليست كل عناصره الأخرى أصفار. في المصفوفة B الصف الثاني كل عناصره أصفار بينما الصف الثالث صف غير صفري. في المصفوفة C أول عنصر غير صفري للمصفوفة 4 وليس الواحد الصحيح.

مثال 3.4 أوجد المصفوفة المختزلة للمصفوفة

$$A=\begin{bmatrix}1&-3&1&-7&4\\1&2&-3&0&0\\0&1&-4&0&1\end{bmatrix}$$

الحل للحصول على الشكل المختزل للمصفوفة A نجري عليها بعض عمليات الصف اليسيطة.

<u>العملية الأولى</u> : ضرب الصف الأول من A في 1−، والجمع مع الصف الثاني فنحصل على

$$\begin{bmatrix}1&-3&1&-7&4\\0&5&-4&7&-4\\0&1&-4&0&1\end{bmatrix}$$

العملية الثانية: نضرب الصف الثاني ــ فقــط ــ في العــدد $\frac{1}{5}$

فنحصل على المصفوفة

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & 1 & -7 & 4 \\ 0 & 1 & -\frac{4}{5} & \frac{7}{5} & -\frac{4}{5} \\ 0 & 1 & -4 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

العملية الثالثة: ضرب الصف الثاني في العدد 3، والجمــع مــع الصف الأول، ثم ضرب الصف الثاني ــ أيضاً ــ في العــدد -1، والجمع مع الصف الثالث فنحصل ــ على الترتيب ــ على

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{7}{5} & -\frac{14}{5} & \frac{8}{5} \\ 0 & 1 & -\frac{4}{5} & \frac{7}{5} & -\frac{4}{5} \\ 0 & 1 & -4 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{7}{5} & -\frac{14}{5} & \frac{8}{5} \\ 0 & 1 & -\frac{4}{5} & \frac{7}{5} & -\frac{4}{5} \\ 0 & 0 & -\frac{16}{5} & -\frac{7}{5} & \frac{9}{5} \end{bmatrix}$$

العملية الرابعة: ضرب الصف الثاني في العدد $\frac{-5}{16}$ فنحصل على

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{7}{5} & -\frac{14}{5} & \frac{8}{5} \\ 0 & 1 & -\frac{4}{5} & \frac{7}{5} & -\frac{4}{5} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{7}{16} & -\frac{9}{16} \end{bmatrix}$$

العملية الخامسة : ضرب الصف الثالث في $\frac{4}{5}$، والجمع مع الصف الثاني، ثم ضرب الصف الثالث ــ أيضاً ــ في $\frac{7}{5}$، والجمــع مــع الصف الأول نحصل ــ على الترتيب ــ على

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{7}{5} & -\frac{14}{5} & \frac{8}{5} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{7}{4} & -\frac{5}{4} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{7}{16} & -\frac{9}{16} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -\frac{35}{16} & \frac{13}{16} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{28}{16} & -\frac{20}{16} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{7}{16} & -\frac{9}{16} \end{bmatrix}$$

وهكذا نجد أن A_R هي المصفوفة

$$A_R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -\frac{35}{16} & \frac{13}{16} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{28}{16} & -\frac{20}{16} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{7}{16} & -\frac{9}{16} \end{bmatrix}$$

مثال 3.5 أوجد المصفوفة المختزلة لكل من

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 3 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & -3 & 1 & -7 & 4 \\ 1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

الحل

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 3 & 1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\frac{1}{2}r_1} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 3 & 1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{2r_1 - r_2}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & -5 \\ 0 & 3 & 1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\frac{1}{4}r_2} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{-5}{4} \\ 0 & 3 & 1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{2r_2 - r_1}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{-5}{2} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{-5}{4} \\ 0 & 3 & 1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{3r_2 - r_3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{-5}{2} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{-5}{4} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{-19}{4} \end{bmatrix} = A_R$$

☺☺☺

$$B \xrightarrow{\frac{1}{2}r_2 + r_1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow{-r_2 + r_3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{\frac{1}{3} \times r_3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{r_2 + r_1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{-r_3 + r_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = B_R$$

☺☺☺

$$C = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 1 & -7 & 4 \\ 1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{-r_1 + r_2} \begin{bmatrix} 1 & -3 & 1 & -7 & 4 \\ 0 & 5 & -2 & 7 & -4 \\ 0 & 1 & -4 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{\frac{1}{5}r_2} \begin{bmatrix} 1 & -3 & 1 & -7 & 4 \\ 0 & 1 & \frac{-2}{5} & \frac{7}{5} & \frac{-4}{5} \\ 0 & 1 & -4 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{3r_2 + r_1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{-1}{5} & \frac{-14}{5} & \frac{8}{5} \\ 0 & 1 & \frac{-2}{5} & \frac{7}{5} & \frac{-4}{5} \\ 0 & 1 & -4 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{-r_2+r_3}\begin{bmatrix}1 & 0 & \frac{-1}{5} & \frac{-14}{5} & \frac{8}{5}\\ 0 & 1 & \frac{-2}{5} & \frac{7}{5} & \frac{-4}{5}\\ 0 & 0 & \frac{-18}{5} & \frac{-7}{5} & \frac{9}{5}\end{bmatrix}\xrightarrow{\frac{-5}{18}r_3}\begin{bmatrix}1 & 0 & \frac{-1}{5} & \frac{-14}{5} & \frac{8}{5}\\ 0 & 1 & \frac{-2}{5} & \frac{7}{5} & \frac{-4}{5}\\ 0 & 0 & 1 & \frac{7}{18} & \frac{-1}{2}\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{\frac{2}{5}r_3+r_2}\begin{bmatrix}1 & 0 & \frac{-1}{5} & \frac{-14}{5} & \frac{8}{5}\\ 0 & 1 & 0 & \frac{14}{9} & -1\\ 0 & 0 & 1 & \frac{7}{18} & \frac{-1}{2}\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{\frac{1}{5}r_3+r_1}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & \frac{-49}{18} & \frac{3}{2}\\ 0 & 1 & 0 & \frac{14}{9} & -1\\ 0 & 0 & 1 & \frac{7}{18} & \frac{-1}{2}\end{bmatrix}=C_R$$

تعريف 3.6 — مرتبة المصفوفة Rank of a Matrix

تُعرف مرتبة *(rank)* المصفوفة A ويرمز لها بالرمز $rank\,(A)$ على أنها عدد الصفوف غير الصفرية في مصفوفتها المختزلة A_R.

▲▲▲

ملاحظة

في المثال السابق نجد أن عدد الصفوف غير الصفرية في المصفوفات المختزلة هو العدد 3 إذن فإن

$$rank\,(A)=3, rank\,(B)=3$$



العلاقة بين المصفوفة المختزلة ومصفوفة الوحدة

إذا كانت المصفوفة A هي مصفوفة مربعة، غير شاذة من الرتبة n، بمعنى أن $|A| \neq 0$، إذاً فإن مصفوفتها المختزلة هي مصفوفة الوحدة من نفس الرتبة، أي المصفوفة I_n. كما أن مرتبتها هي — أيضاً — n أي أن $rank(A) = n$.

3.6 المحـــددات – Determinants

تعرفنا في الباب السابق على المصفوفات وبعض أنواعها وبعض صفاتها. في هذا الفصل نتعرف على ما يسمى محدد المصفوفة، وندرس خواصه ونتعرف على كيفية حساب قيمته الجبرية. وسوف نلاحظ أن للمحدد قيمة جبرية على عكس المصفوفة والتي ليس لها أي قيم جبرية، بل هي مجرد ترتيب من العناصر.

تعريف 3.7 | **المحدد – Determinant**

يُعرف محدد المصفوفة المربعة A على أنه كائن رياضي له قيمة جبرية ويرمز له بالرمز $\det(A)$ أو الرمز $|A|$.

▲▲▲

فمثلاً إذا كانت A هي المصفوفة المربعة $A = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ فإن محدد

المصفوفة A هو $4 = \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = |A|$.

تعريف 3.8 رتبة المحدد Order of a Determinant

بما أن المحدد يُعرف للمصفوفات المربعة فقط إذن فإن رتبة *(Order)* المحدد هي عدد الصفوف أو عدد الأعمدة.

▲▲▲

فإذا كانت A مصفوفة من الرتبة $n \times n$، فإن رتبة المحدد تكون n. فمثلاً المحدد من الرتبة الثانية يتكون من صفين وعمودين فقط. هذا، ويمكن حساب القيمة الجبرية للمحدد بطرق كثيرة نقدم إحداها في هذا الباب وهي تعتمد على استخدام أي صف (أي عمود) آخذين في الأعتبار ما يسمى قاعدة الإشارات كما سنرى لاحقاً.

حساب القيمة الجبرية للمحدد

أولاً : حساب قيمة المحددات من الرتبة الثانية أي في حالة $n = 2$.

لنفرض محدد الرتبة الثانية $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$. باستخدام الصف الأول نجد أن القيمة الجبرية لهذا المحدد هي المقدار $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$، أي أن

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

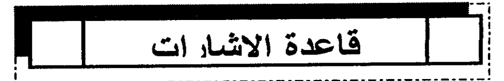
ثانياً: حساب قيمة المحددات من الرتبة الثالثة أي في حالة $n = 3$.

لنفرض محدد الرتبة الثانية $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$. باستخدام الصف الأول نجد أن القيمة الجبرية لهذا المحدد تحسب كما يلي

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$+ a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

ثالثاً: المحددات من الرتب العليا : تحسب قيمتها الجبرية بنفس طريقة حساب قيمة المحددات من الرتبة الثانية أو الثالثة مع مراعاة قاعدة الإشارات التالية:



يمكن حساب قيمة المحدد باستخدام أي صف أو أي عمود بشرط مراعاة قاعدة الإشارات الآتية :

$$\begin{vmatrix} + & - & + & - & \cdots \\ - & + & - & + & \cdots \\ + & - & + & - & \cdots \\ - & + & - & + & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \end{vmatrix}$$

■ ■ ■

مثال 3.6 احسب كل من $|B|,|A|$ إذا كان

$$A=\begin{bmatrix}1 & 4 & -9\\ 2 & 3 & 2\\ 4 & 1 & 5\end{bmatrix},\ B=\begin{bmatrix}4 & 3\\ 1 & 1\end{bmatrix}$$

الحل

$$|A|=\begin{vmatrix}1 & 4 & -9\\ 2 & 3 & 2\\ 4 & 1 & 5\end{vmatrix}=+1(3\times5-2\times1)-4(2\times5-2\times4)$$

$$-9(2\times1-3\times4)=95$$

$$|B|=\begin{vmatrix}4 & 3\\ 1 & 1\end{vmatrix}=4\times1-3\times1=1$$

3.7 خــواص المحــددات Properties of Determinants

المحددات مثلها مثل أي كائن رياضي آخر تمتلك الكثير من الصفات والخواص الرياضية التي تميزها. فيما يلي نقدم بعض خواص المحددات. في الحقيقة أن معرفة هذه الصفات تسهل عملية حسابها وتسهم إلى حد كبير في توفير الجهد والوقت.

1 **فك المحدد أو تعيين قيمته باستخدام أي صف أو أي عمود**

فك المحدد أو تعيين قيمته باستخدام أي صف أو أي عمود يعطى نفس القيمة بشرط مراعاة قاعدة الإشارات. فمثلا المحدد

$$|X| = \begin{vmatrix} 8 & -2 & 4 \\ 1 & 0 & -3 \\ -2 & 8 & 3 \end{vmatrix}$$ إذا تم حسابه باستخدام الصف الأول يعطى

$$|X| = 8\times(0\times 3-(-3)\times 8)+2\times(1\times 3-(-3)\times(-2)) + 4\times(1\times 8-0\times(-2)) = 218$$

وبحساب قيمة المحدد باستخدام العمود الثاني نحصل على نفس النتيجة، حيث نجد أن

$$|X| = -(-2)\times\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} + 0\times\begin{vmatrix} 8 & 4 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} - 8\times\begin{vmatrix} 8 & 4 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = 218$$

2 **ماذا يحدث إذا احتوى المحدد على صفوف أو أعمدة كل عناصرها أصفار؟**

إذا احتوى المحدد على صف أو عمود وكانت كل عناصر هذا الصف أو العمود أصفاراً فإن قيمة المحدد تساوى صفراً. فمثلاً

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \\ 4 & 8 & 9 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} 0 & 9 & 0 \\ 5 & 6 & 0 \\ 4 & 8 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

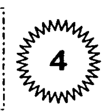
وذلك لأن في المحدد الأول الصف الثاني كل عناصره أصفار بينما في المحدد الثاني العمود الثالث كل عناصره أصفار.

3 **ماذا يحدث إذا احتوى المحدد على صفوف متساوية أو أعمدة متساوية؟**

إذا تساوت عناصر صفان أو عمودان في المحدد فإن قيمته تساوى



صفراً. على سبيل المثال، فإن $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 6 & 8 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 0$، وذلك لتساوى عناصر الصفين الأول والثالث.



هل تتغير قيمة المحدد عند تبديل الصوف إلى أعمدة أو العكس؟

لا تتغير قيمة المحدد إذا تم تبديل كل الصفوف إلى أعمدة أو كل الأعمدة إلى صفوف. أي أن $|A| = |A^t|$ حيث A^t هو مدور المصفوفة A . على سبيل المثال فإن

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

5

ضرب عناصر صف أو عمود في كمية قياسية

إذا ضربت عناصر صف (عمود) في كمية قياسية فإن قيمة المحدد الناتج تساوى قيمة المحدد الأصلي مضروباً في نفس الكمية القياسية.

فعلى سبيل المثال إذا كانت β كمية قياسية فإن

$$\beta \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \beta\, a_1 & a_2 & a_3 \\ \beta\, b_1 & b_2 & b_3 \\ \beta\, c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

فمثلا إذا كان

$$|A|=\begin{vmatrix}9 & -4 & 1\\2 & 0 & 0\\4 & 1 & 0\end{vmatrix}=2\Rightarrow 5\times\begin{vmatrix}9 & -4 & 1\\2 & 0 & 0\\4 & 1 & 0\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}45 & -4 & 1\\10 & 0 & 0\\20 & 1 & 0\end{vmatrix}=10$$



أنه في حالة المحددات،فإن ضرب المحدد في كمية قياسية يعني ضرب صف واحد فقط (أي صف) أو ضرب عمود واحد فقط (أي عمود) من المحدد في هذه الكمية القياسية وليس ضرب كل عنصر كما في حالة المصفوفات.

6 كيف تتغير إشارة قيمة المحدد؟

تتغير إشارة قيمة المحدد إذا تغير وضع صف مكان صف آخر أو عمود مكان عمود آخر. فمثلاً

$$\begin{vmatrix}9 & -4 & 1\\2 & 0 & 0\\4 & 1 & 0\end{vmatrix}=2,\begin{vmatrix}2 & 0 & 0\\9 & -4 & 1\\4 & 1 & 0\end{vmatrix}=-2$$

وذلك لتبديل الصف الأول مع الصف الثاني.



7 هل تتغير قيمة المحدد إذا تم جمع مضاعفات صف (عمود) إلى صف (عمود) آخر؟

لا تتغير قيمة المحدد إذا تم جمع أو طرح مضاعفات صف (أو عمود) إلى صف (أو عمود) آخر. فمثلاً لنفرض المحدد

$$\begin{vmatrix}4 & -2 & 2\\0 & 1 & 0\\1 & -3 & 1\end{vmatrix}=2$$



والآن نضرب الصف الثاني في العدد 3 ونجمع الناتج إلى الصف الثالث فنحصل على $2=\begin{vmatrix} 4 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$.

8 محدد حاصل ضرب مصفوفتين

محدد حاصل ضرب مصفوفتين يساوى محدد المصفوفة الأولى مضروباً في محدد المصفوفة الثانية. أي أنه إذا كانت A,B مصفوفتان مربعتين من الرتبة $n \times n$ فإن

$$|AB| = |A||B|$$

فإذا كان

$$A=\begin{bmatrix} 4 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow AB=\begin{bmatrix} -4 & 4 & 10 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

فإننا نجد أن $|A| = 4, |B| = 2, |AB| = 8$

3.8 المصفوفة العكسية – Inverse of a Matrix

ما دمنا قد عرفنا المصفوفة فلابد أن نتعرف على عكسها أو ما يسمى المصفوفة العكسية. في هذا الفصل نقدم طريقتين لحساب المصفوفة العكسية. الأولى باستخدام المحددات والثانية باستخدام مفهوم المصفوفة المختزلة. على أية حال فليس لكل مصفوفة توجد

مصفوفنها العكسية إذ أهنالك بعض الشروط المطلوبة لكي توجد المصفوفة العكسية لمصفوفة ما. فلا بد للمصفوفة أن تكون مربعة وأن يكون محددها غير صفري أي لا يساوي الصفر حت توجد لها مصفوفة عكسية.

تعريف 3.9 — المصفوفة العكسية **Inverse of a Matrix**

لنفرض أن A مصفوفة مربعة من الرتبة $n \times n$ ومحددها لا يساوي الصفر ($|A| \neq 0$). تعرف المصفوفة العكسية للمصفوفة A و يرمز لها بالرمز A^{-1} بأنها المصفوفة من الرتبة $n \times n$ التي تحقق الشرط:

$$AA^{-1} = I_n = A^{-1}A$$

حيث I_n هي مصفوفة الوحدة.

▲▲▲



أن A^{-1} يرمز إلى معكوس المصفوفة A وليس المقلوب، أي أن

$$A^{-1} \neq \frac{1}{A}$$

نظرية – 3.4 — النظريات الآتية للمصفوفة العكسية كلها صحيحة

[1] الشرط اللازم و الكافي لكي يكون للمصفوفة معكوس هو أن تكون المصفوفة مربعة، وأن يتحقق الشرط $|A| \neq 0$. [2] إذا وجد

معكوس للمصفوفة فإن هذا المعكوس وحيد. [3] يمكن إثبات أنه لأي مصفوفتين مربعتين A,B بحيث $|A|\neq 0, |B|\neq 0$، فإن

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$$

✪✪✪

طريقة الحصول على المصفوفة العكسية

للحصول على المصفوفة العكسية A^{-1} للمصفوفة المربعة A والتي محددها لا يساوي الصفر لدينا طريقتين.

الطريقة الأولى:

[1] نكون ـــ أولاً ـــ ما تسمى مصفوفة العوامل المرافقة *(Cofactors matrix)* وذلك بأن يستبدل كل عنصر في المصفوفة A بالعامل المرافق له مع مراعاة قاعدة الإشارات.

[2] نوجد المصفوفة المحورة *(transpose)* لمصفوفة العوامل المرافقة والتي تسمى "المصفوفة المرتبطة *(adjoint matrix)* للمصفوفة A ويرمز لها بالرمز $Adj(A)$.

[3] نحصل على المصفوفة العكسية A^{-1} في الشكل

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \times Adj\ (A)$$

مثال 3.7 أوجد (إن وجدت) المصفوفة العكسية A^{-1} للمصفوفة

$$A=\begin{bmatrix}1 & 1 & 3\\ 0 & 1 & -1\\ 2 & 0 & -4\end{bmatrix}$$

الحل بما أن المصفوفة A مربعة، كما أن $|A|=-12\neq 0$، إذن يوجد A^{-1} . نوجد مصفوفة العوامل المرافقة ولنرمز لها بالرمز C، إذن

$$C=\begin{bmatrix}\begin{vmatrix}1 & -1\\ 0 & -4\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}0 & -1\\ 2 & -4\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}0 & 1\\ 2 & 0\end{vmatrix}\\ -\begin{vmatrix}1 & 3\\ 0 & -4\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}1 & 3\\ 2 & -4\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}1 & 1\\ 2 & 0\end{vmatrix}\\ \begin{vmatrix}1 & 3\\ 1 & -1\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}1 & 3\\ 0 & -1\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{vmatrix}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-4 & -2 & -2\\ 4 & -10 & 2\\ -4 & 1 & 1\end{bmatrix}$$

تكون المصفوفة المرتبطة $Adj(A)$ وهي محورة المصفوفة C، أي أن

$$Adj(A)=\begin{bmatrix}-4 & 4 & -4\\ -2 & -10 & 1\\ -2 & 2 & 1\end{bmatrix}$$

إذن المصفوفة العكسية هي

$$A^{-1}=\frac{1}{-12}\begin{bmatrix}-4 & 4 & -4\\ -2 & -10 & 1\\ -2 & 2 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3}\\ \frac{1}{6} & \frac{5}{6} & -\frac{1}{12}\\ \frac{1}{6} & -\frac{1}{6} & -\frac{1}{12}\end{bmatrix}$$

✍.

مثال 3.8 أوجد A^{-1} (إن وجدت) إذا كانت

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \; ; \; |A| \neq 0$$

الحل بما أن المصفوفة A مربعة كما أن $|A| \neq 0$، إذن يوجد A^{-1}.

مصفوفة العوامل المرافقة هي $\begin{bmatrix} a_{22} & -a_{21} \\ -a_{12} & a_{11} \end{bmatrix}$. أما المصفوفة المرتبطة فهي

$$\text{Adj}(A)=\begin{bmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{bmatrix}$$

إذن المصفوفة العكسية هي

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}\times \text{Adj}(A)=\frac{1}{|A|}=\begin{bmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{bmatrix}$$

نلاحظ من المثال السابق أنه للحصول على المصفوفة العكسية لمصفوفة مربعة من الرتبة الثانية بطريقة سريعة، علينا اتباع الخطوات الثلاث الآتية

[1] يتم تبديل موضع عنصري القطر الرئيسي. [2] يتم تغيير إشارتي العنصرين الآخرين. [3] يتم قسمة كل عنصر من عناصر المصفوفة الناتجة على قيمة المحدد $|A|$.

الطريقة الثانية:

هذه الطريقة تعتمد على مفهومين. مفهوم المصفوفة الموسعة ومفهوم المصفوفة المختزلة. لنعتبر الآن المصفوفة المربعة A من الرتبة $n \times n$ حيث $|A| \neq 0$. نكتب المصفوفة الموسعة $\left[A|I_n\right]$، حيث I_n هي مصفوفة الوحدة من الرتبة $n \times n$، ثم نجرى عمليات الصف البسيطة عليها للحصول على المصفوفة المختزلة لها علي الشكل $\left[A|I_n\right]_R$، حيث نجد أن مصفوفة الوحدة ظهرت مكان المصفوفة A وبجانبها المصفوفة العكسية أي أن

$$\left[A|I_n\right]_R = \left[I_n|A^{-1}\right]$$

مثال 3.10 أوجد معكوس المصفوفة.

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 11 & 4 \end{bmatrix}$$

الحل

$$A|I_n] = \left[\begin{array}{cc|cc} 3 & 1 & 1 & 0 \\ 11 & 4 & 0 & 1 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cc|cc} 3 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{11}{3} & 1 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cc|cc} 3 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -11 & 3 \end{array}\right]$$

$$\to \left[\begin{array}{cc|cc} 3 & 0 & 12 & -3 \\ 0 & 1 & -11 & 3 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 4 & -1 \\ 0 & 1 & -11 & 3 \end{array}\right]$$

إذن

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ -11 & 3 \end{bmatrix}$$

<u>باستخدام الطريقة الأولى نجد أن</u>

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}\times Adj(A)=\frac{1}{1}\times\begin{bmatrix}4 & -1\\ -11 & 3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4 & -1\\ -11 & 3\end{bmatrix}$$

3.9 مسائل

[1] أوجد $-A, 3A, A-B, A+2B$ إذا كان

$$A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 0 & 2 & 4\end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix}2 & 3 & 0\\ -1 & 2 & 5\end{bmatrix}$$

[2] إذا كـــــان $B=\begin{bmatrix}-3 & -2\\ 1 & -5\\ 4 & 3\end{bmatrix}, A=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\\ 5 & 6\end{bmatrix}$ أوجـــــد $D=\begin{bmatrix}p & q\\ r & s\\ t & u\end{bmatrix}$ بحيث يكون $A+B-D=0$.

[3] احسب $AB, AC, A+4BA, 2C^{-1}-2B$ إذا علمت أن

$$A=\begin{bmatrix}2 & 1 & 0\\ 3 & 2 & 0\\ 1 & 0 & 1\end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & 0\\ 2 & 1 & 1 & 0\\ 2 & 3 & 1 & 2\end{bmatrix}, C=\begin{bmatrix}0 & 0 & 1 & 0\\ 2 & 0 & 1 & 0\\ 2 & -3 & 1 & 2\end{bmatrix}$$

[4] أوجد المصفوفات العكسية (في حالة وجودها) للمـــصفوفات الآتية

$$A=\begin{bmatrix}1 & 3\\ 14 & 5\end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 0 & 2\\ 6 & 2 & 0\end{bmatrix}, C=\begin{bmatrix}1 & 3 & 3\\ 1 & 4 & 3\\ 1 & 3 & 4\end{bmatrix}$$

$$A=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0 & 0\\ 3 & 0 & 1 & 1\\ 3 & 0 & 0 & 2\\ 1 & 1 & 0 & 1\end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix}0 & 2 & 3\\ 0 & 0 & 2\\ 6 & 2 & 0\end{bmatrix}, C=\begin{bmatrix}1 & 3 & 3\\ 1 & 0 & 0\\ 1 & -3 & 4\end{bmatrix}$$

[5] حل المعادلة المصفوفية $AX=B$ ، إذا كان

$$A=\begin{bmatrix}2 & 3\\ 2 & 5\end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix}1 & 4\\ 3 & 2\end{bmatrix}, X=\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}$$

[6] أوجد الشكل المختزل لكل مصفوفة من المصفوفات الآتية

$$\begin{bmatrix}-1 & 2 & 3 & 1\\ 1 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1 & -1 & 3\\ 0 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}3 & -8 & 1 & 0\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}0 & 0 & 0 & 6 & 0\\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1\\ 0 & 4 & 3 & 4 & 0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0 & 1 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 2 & 0\\ 2 & 0 & 1 & 0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}6 & 1\\ 0 & 6\\ 1 & 3\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

[7] اثبت بدون فك أن $\begin{vmatrix}4 & -2 & 1\\ 3 & 0 & -5\\ -8 & -3 & 11\end{vmatrix}=-83$.

[8] اثبت بدون فك أن $\begin{vmatrix}1 & a & b+c\\ 1 & b & a+c\\ 1 & c & a+b\end{vmatrix}=0$.

[9] إثبت باستخدام خواص المحددات أن

$$\begin{vmatrix} a_1^2 & a_1 & 1 \\ a_2^2 & a_2 & 1 \\ a_3^3 & a_3 & 1 \end{vmatrix} = -(a_1 - a_2)(a_2 - a_3)(a_3 - a_1)$$

[10] أوجد الحل ــ في حالة وجوده ــ لنظم المعـــادلات الخطيـــة الآتية

$x_1 - 3x_2 + x_3 = 1$ $2x_1 + x_2 + x_3 = -1$ $x_1 + x_2 + x_3 = 2$	$x_1 + 2x_2 - x_3 = 1$ $-x_1 + x_2 + x_3 = 3$ $2x_1 - 3x_2 - x_3 = 2$
$x_1 - 3x_2 = 0$ $2x_1 + x_2 + x_3 = 0$ $x_1 + x_2 + x_3 = 2$	$3x_1 + 2x_2 - x_3 = 1$ $-5x_1 + x_2 + x_3 = 0$ $2x_1 - 3x_2 - x_3 = 2$
$x_1 - 3x_2 + x_3 = 1$ $2x_1 = 0$ $x_1 + x_2 + x_3 = 2$	$x_1 + 2x_2 - x_3 = 9$ $-x_1 + x_2 + x_3 = 1$ $2x_1 - x_3 = -2$
$3x_2 + x_3 = 1$ $2x_1 + x_2 = 0$ $x_1 + x_2 + x_3 = 0$	$4x_1 + 2x_2 - x_3 = 1$ $-x_1 + x_2 + x_3 = 0$ $-3x_2 - x_3 = 0$

4

القيم المميزة والمتجهات المميزة للمصفوفة
EIGENVALUES AND EIGENVECTORS OF A MATRIX

كل شيء مادي في هذا الكون له قيمة جبرية فأي جسم مادي له أبعاد مثل الطول والعرض والأرتفاع، الكتلة، الحجم، .. ولكل هذه الأبعاد توجد قيم جبرية. فماذا عن القيم المميزة التي نحن بصددها في هذا الباب.

نعلم من دراستنا السابقة أن المصفوفة تُعرف على انها ترتيب معين من العناصر على شكل صفوف و أعمدة، وعلى هذا، فإنه لايوجد لأية مصفوفة كانت أية قيمة جبرية ***(Algebraic value)***. على العكس من هذا، فإن محدد ***(Determinant)*** أية مصفوفة مربعة له قيمة جبرية واحدة. فمثلاً إذا كانت A هي المصفوفة $A=\begin{bmatrix}-5 & 0\\ 1 & 2\end{bmatrix}$ فإن محدد المصفوفة A ويرمز له بالرمز $|A|$ له القيمة الجبرية -10 ، أي أن $|A|=\begin{vmatrix}-5 & 0\\ 1 & 2\end{vmatrix}=-10$ أما المصفوفة A نفسها فليس لها أية قيم جبرية.

ولكن يبقى السؤال التقليدي .. هل يمكن لنا معرفة قيمة المصفوفة نفسها وهي التي تعرف على أنها مجرد ترتيب معين من الأشياء ليس إلا ؟ بمعنى آخر هل يمكن أن نعين قيمة للترتيب (لمصفوفة)؟ كيف نستطيع تميزالمصفوفة عن غيرها من المصفوفات الأخرى التي تتشابه

معها في الرتبة *(order)* المرتبة *(rank)* وفي صفات أخرى؟ وهناك الكثير والكثير من التساؤلات سنحاول الإجابة عنها في هذا الباب.

4.1 القيم المميزة والمتجهات المميزة للمصفوفة

دعنا نبدأ المحاولة لتعيين القيمة المميزة للمصفوفة المربعة $\mathbf{A}$ من الرتبة $n \times n$. لنفرض مثلاً أننا ضربنا المصفوفة $\mathbf{A}$ من جهة اليمين في مصفوفة العمود $\mathbf{B}$ من الرتبة $n \times 1$ فكان حاصل الضرب هو $\lambda\mathbf{B}$ حيث λ هو أي عدد حقيقي أو مركب.

وبلغة الرياضيات إذا فرضنا أن $\mathbf{AB} = \lambda\mathbf{B}$ فهل هذا يعني أن λ يمكن إعتبارها قيمة مساوية للمصفوفة $\mathbf{A}$؟ في الواقع أن الإجابة عن هذا السؤال هي بكل تأكيد نعم وفى هذه الحالة فإن القيمة λ تسمى قيمة مميزة *(Eigenvalue)* للمصفوفة إذ أنها ليست قيمة جبرية. أما مصفوفة العمود $\mathbf{B}$ فتسمى المتجه المميز *(Eigenvector)* المقابل للقيمة المميزة λ. لتوضيح هذه الفكرة لنحاول تعيين هذه القيمة، λ، للمصفوفة $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -5 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ مثلاً. بضرب المصفوفة $\mathbf{A}$ من جهة اليمين في المصفوفة $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ \alpha \end{bmatrix}$ حيث $\alpha \neq 0$، نجد أن

$$AB = \begin{bmatrix} -5 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2\alpha \end{bmatrix} = 2\begin{bmatrix} 0 \\ \alpha \end{bmatrix} = 2B \qquad (4.1)$$

أيضا بضرب المصفوفة A من جهة اليمين في المصفوفة $C = \begin{bmatrix} -7\alpha \\ \alpha \end{bmatrix}$ حيث $\alpha \neq 0$، نجد أن

$$AC = \begin{bmatrix} -5 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -7\alpha \\ \alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 35\alpha \\ -7\alpha + 2\alpha \end{bmatrix} = -5\begin{bmatrix} -7\alpha \\ \alpha \end{bmatrix} = -5C \qquad (4.2)$$

من المعادلة رقم (4.1) نجد أن قيمة المصفوفة A هي 2 ومن المعادلة (4.2) نجد أن قيمة المصفوفة A هي 5−، الأمر الذي يعني أن للمصفوفة A والتي من الرتبة 2×2 توجد قيمتين هما $2, -5$.

أيضا نجد أنه يوجد متجهين مميزين الأول هو $\begin{bmatrix} 0 \\ \alpha \end{bmatrix}$ ويقابل القيمة المميزة $\lambda = 2$ والثاني $\begin{bmatrix} -7\alpha \\ \alpha \end{bmatrix}$ في مقابل القيمة المميزة $\lambda = -5$.

نلاحظ أيضا أن هذه المتجهات المميزة تعتمد على البارامتر الاختياري *(Arbitrary)* α، وعلى هذا فإن كل متجه مميز هو في الواقع فضاء لانهائي من المتجهات المميزة.

تعريف 4.1 | **القيمة المميزة - eigenvalue**

تُعرف القيمة المميزة للمصفوفة المربعة A من الرتبة $n \times n$ على أنها تلك القيمة الحقيقية أو المركبة λ والتي تحقق المعادلة $AX = \lambda X$

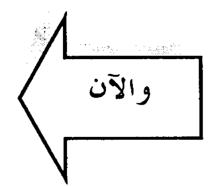
حيث X هي مصفوفة العمود من الرتبة $n \times 1$ المقابلة للقيمة المميزة λ.

▲▲▲

تعريف 4.2 | **المتجه المميز - eigenvector**

يُعرف المتجه المميز X للمصفوفة المربعة A من الرتبة $n \times n$ على أنه مصفوفة العمود من الرتبة $n \times 1$ المقابلة للقيمة الحقيقية أو المركبة λ والتي تحقق المعادلة $AX = \lambda X$.

▲▲▲



هل من طريقة لحساب القيم المميزة للمصفوفة وكذلك المتجهات المميزة المقابلة لهذه القيم المميزة؟ وما الذي يجب حسابه أولاً القيم المميزة أم المتجهات المميزة؟

وهل كل مصفوفة لها قيم مميزة؟ وما هو عدد القيم المميزة في حالة وجودها وكم هو العدد المقابل من المتجهات المميزة؟ وهل المتجه المميز المقابل لقيمة مميزة واحدة هو أيضا وحيد أم أن هناك فضاء لانهائي من المتجهات المميزة في مقابل كل قيمة مميزة واحدة ؟ للأجابة عن هذه التساؤلات دعنا نبدأ بأستخدام التعريف السابق في إثبات النظرية الآتية.

نظرية ـ 4.1

شرط وجود القيم المميزة

إذا كانت A هي المصفوفة $A=\left[a_{ij}\right]; i,j=\overline{1,n}$ فإن λ هي قيمة مميزة للمصفوفة A إذا كـان وفقـط إذا كـان $\left|\lambda I_n - A\right| = 0$.
والعكس صحيح، فإذا كانت λ هي قيمة مميزة للمصفوفة A فإن أي حل غير صفري *(nontrivial solution)*، X، للنظام المتجانس $(\lambda I_n - A)X = O$ هو متجه مميز مقابل للقيمة المميزة λ.

✪✪✪

البرهان

لنفرض أن λ هي قيمة مميزة للمصفوفة $A=\left[a_{ij}\right]$ حيث $i,j=\overline{1,n}$، وأن X هو المتجهة المميز المقابل لهذه القيمة المميزة.

هذا يعني أن $AX=\lambda X$، إذن $(\lambda I_n - A)X = O$ حيث I_n هي مصفوفة الوحدة من الرتبة $n\times n$، بينما O هي مصوفة صـفرية.
ومن المعروف أن هذا النظام المتجانس من المعادلات الجبرية له حل غير صـفرى *(Nontrivial Solution)*، X، فقـط إذا كانـت المصفوفة $(\lambda I_n - A)$ شاذه، أي إذا كان

$$\left|\lambda I_n - A\right| = 0$$

وهذه معادلة كثيرة حدود من الدرجة n في λ وهى تسمى المعادلة المميزة *(Eigen Equation)* للمصفوفة A. حل أو جذور هـذه

المعادلة وعددهم n هي القيم المميزة $\{\lambda_i\}_{i=1}^{n}$. وبما أن جذور هذه المعادلة يمكن أن تكون حقيقية أو تخيلية، لذا فإن القيم المميزة للمصفوفة يمكن اعتباها كميات قياسية *(scalars)*.

والآن نحاول إثبات عكس النظرية. نفرض أن $|\lambda \mathbf{I_n} - \mathbf{A}| = 0$، هذا يعني أن المصفوفة $(\lambda \mathbf{I_n} - \mathbf{A})$ شاذه *(singular)* وعلى هذا فإنه يوجد حل غير صفرى، $\mathbf{X}$، لنظام المعادلات المتجانس $(\lambda \mathbf{I_n} - \mathbf{A})\mathbf{X} = \mathbf{O}$ أو $\mathbf{AX} = \lambda \mathbf{X}$.

إذن فإن λ هي قيمة مميزة للمصفوفة $\mathbf{A}$ كما أن $\mathbf{X}$ هو المتجه المميز المقابل لهذه القيمة المميزة λ.

4.2 طريقة حساب القيم المميزة والمتجهات المميزة

للحصول على القيم المميزة $\{\lambda_i\}_{i=1}^{n}$ للمصفوفة $\mathbf{A} = [a_{ij}]$ حيث $i, j = \overline{1,n}$ يتم فك المحدد $|\lambda \mathbf{I_n} - \mathbf{A}| = 0$ أو

$$\begin{vmatrix} \lambda - a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & \lambda - a_{22} & \cdots & -a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \cdots & \lambda - a_{nn} \end{vmatrix} = 0$$

فنحصل على معادلة كثيرة حدود من الدرجة n في λ. بحل هذه المعادلة نحصل على عدد n من القيم المميزة $\{\lambda_i\}_{i=1}^{n}$.

وبما أنه في مقابل كل قيمة مميزة λ_i يوجد متجه مميز، $\mathbf{X_i}$، بحيث يكون $\mathbf{AX_i} = \lambda_i X_i$ لكل $i=\overline{1,n}$. إذن للحصول على المتجه المميز $\mathbf{X_i}$ المقابل للقيمة المميزة λ_i علينا بحل نظام المعادلات الجبرية الخطية المتجانس

$$(\lambda_i \mathbf{I_n} - \mathbf{A})\mathbf{X_i} = \mathbf{O} \ \ \forall \ \ i=\overline{1,n}$$

وبما أن المصفوفة $(\lambda_i \mathbf{I_n} - \mathbf{A})$ شاذة *(Singular)* حسب التعريف فمن المعروف إذن أن حل هذا النظام ليس متجهاً مميزاً واحداً $\mathbf{X_i}$ بل هو فضاء من المتجهات المميزة، الأمر الذي يعني أنه في مقابل كل قيمة مميزة λ_i يوجد عدد لانهائي من المتجهات المميزة $\mathbf{X_i}$.

مثال 4.1 أوجد القيم والمتجهات المميزة للمصفوفة

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

الحل المصفوفة $\mathbf{A}$ مربعة من الرتبة الثانية، أي أن $n = 2$ إذن توجد قيمتين مميزتين. المعادلة المميزة هي

$$|\lambda \mathbf{I_2} - \mathbf{A}| = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} \lambda + 1 & -4 \\ 0 & \lambda - 3 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (\lambda+1)(\lambda - 3) = 0$$

إذن القيم المميزة هي

$$\lambda_1 = -1 \quad , \quad \lambda_2 = 3$$

للحصول على المتجهات المميزة في مقابل $\lambda_1 = -1$ نوجـد حـل النظام $(\lambda_1 \mathbf{I_n} - \mathbf{A})\mathbf{X_1} = \mathbf{0}$ أو

$$\left(-1 \times \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

أي النظام

$$\begin{bmatrix} 0 & -4 \\ 0 & -4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

وباستخدام طريقة جاوس جوردان نجد أن حل النظام السابق يكافيء حل النظام

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

حيث $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ هي المصفوفة المختزلة للمصفوفة $\begin{bmatrix} 0 & -4 \\ 0 & -4 \end{bmatrix}$. مـن هذا النظام نرى أن x_2 هو متغير تابع ***(dependent variable)*** بينما x_1 هو متغير مستقل ***(independent variable)***، نفرض أن $x_1 = \alpha$، حيث $\alpha \neq 0$ تأخذ قيماً إختيارية ما عدا الصفر. إذن وبما أن

$$0x_1 + x_2 = 0 \Rightarrow x_2 = 0$$

إذن فإن

$$\mathbf{X_1} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha \\ 0 \end{bmatrix} = \alpha \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \;\; ; \;\; \alpha \neq 0$$

واضح أن المتجه المميز X_1 ما هو إلا فضاء لانهائي من المتجهات المميزة، وذلك لأن α تأخذ قيماً إختيارية ما عدا الصفر. يسمى $\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$ المتجهة المميز الاساسي *(Fundamental Eigenvector)* لفضاء المتجهات المميزة X_1.

للحصول على المتجهات المميزة المقابلة للقيمة المميزة $\lambda_2 = 3$ نوجد حل النظام $(\lambda_2 I_n - A)X_2 = O$

أو

$$\left(3\times\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}-1 & 4\\0 & 3\end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$$

إذن المطلوب هو حل النظام

$$\begin{bmatrix}4 & -4\\0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$$

أو حل النظام

$$\begin{bmatrix}1 & -1\\0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$$

حيث $\begin{bmatrix}1 & -1\\0 & 0\end{bmatrix}$ هي المصفوفة المختزلة للمصفوفة $\begin{bmatrix}4 & -4\\0 & 0\end{bmatrix}$. من هذا النظام نرى أن x_1 هو متغير تابع *(dependent variable)* بينما x_2 هو متغير مستقل *(independent variable)*، لنفرض أن

$x_2 = \beta$ ، حيث $\beta \neq 0$ تأخذ قيماً إختيارية ما عدا الـــصفر. إذن

وبما أن $x_1 - x_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = x_2 = \beta$

إذن فإن

$$\mathbf{X}_2 = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta \\ \beta \end{bmatrix} = \beta \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \;\; ; \;\; \beta \neq 0$$

واضح أن المتجه المميز $\mathbf{X}_2$ ما هو الا فضاء لانهائي من المتجهـــات المميزة، وذلك لأن β تأخذ قيماً إختيارية ما عدا الصفر. يـــسمى $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ المتجهة المميـــز الاساســـي ***(Fundamental Eigenvector)*** لفراغ المتجهات المميزة $\mathbf{X}_2$.

✍.

مثال 4.2 أوجد القيم والمتجهات المميزة للمصفوقة

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

الحل المصفوفة المعطاه مربعة من الرتبة الثالثة، أي أن $n = 3$ ، إذن توجد ثلاث قيم مميزة. المعادلة المميزة هي

$$\begin{vmatrix} \lambda - 1 & 1 & 0 \\ 0 & \lambda - 1 & 0 \\ 0 & -1 & \lambda + 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (\lambda + 1)(\lambda - 1)^2 = 0$$

إذن القيم المميزة هي $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = 1, \lambda_3 = 1$. للحصول على المتجهات المميزة $X_1 = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$ في مقابل $\lambda_1 = -1$ نوجد حل النظام $(\lambda_1 I_3 - A)X_1 = O$ أي النظام

$$\left(-1 \times \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

أو

$$\begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

وباستخدام طريقة جاوس- جوردان فإن حل هذا النظام يكافيء حل النظام

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

حيث نجد هنا أن x_1, x_2 هما متغيران تابعان بينما x_3 هو متغير مستقل، لنفرض أن $x_3 = \alpha$ ، حيث $\alpha \neq 0$ تأخذ قيماً إختيارية ما عدا الصفر. إذن وبما أن

$$x_1 + 0x_2 + 0x_3 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = 0$$
$$0x_1 + x_2 + 0x_3 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_2 = 0$$

إذن فإن

$$\mathbf{X}_1 = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \alpha \end{bmatrix} = \alpha \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \;;\; \alpha \neq 0$$

واضح أن المتجه المميز $\mathbf{X}_1$ ما هو إلا فضاء لانهائي من المتجهات المميزة، وذلك لأن α تأخذ قيماً اختيارية ما عدا الصفر. المتجهة المميز $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ يسمى المتجه الإساسي لفضاء المتجهات المميزة $\mathbf{X}_1$.

للحصول على المتجهات المميزة المقابلة للقيمة المميزة $\lambda_2 = 1$ نوجد حل النظام $(\lambda_2 \mathbf{I}_3 - \mathbf{A})\mathbf{X}_2 = \mathbf{O}$ أي النظام

$$\left(1 \times \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}\right) \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

أو النظام

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

وباستخدام طريقة جاوس- جوردان لحل هذا النظام المتجانس من المعادلات الخطية الجبرية، يكون المطلوب هو حل النظام

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

والذى نحصل منه على

$$\begin{aligned} x_1 &= \beta \\ 0x_1 + x_2 + 0x_3 = 0 \quad &\Rightarrow \quad x_2 = 0 \\ 0x_1 + 0x_2 + x_3 = 0 \quad &\Rightarrow \quad x_3 = 0 \end{aligned}$$

وبالتالي فإن

$$\mathbf{X}_2 = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \beta \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad ; \quad \beta \neq 0$$

واضح أن المتجه المميز $\mathbf{X}_2$ ما هو إلا فضاء لانهائي من المتجهات المميزة، وذلك لأن β تأخذ قيماً إختيارية ما عدا الصفر. يسمى المتجه $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ المتجهة المميز الاساسي لفراغ المتجهات المميزة $\mathbf{X}_2$.

المتجهات المميزة المقابلة للقيمة المميزة $\lambda_3 = 1$ هي نفسها المتجهات المميزة المقابلة للقيمة المميزة $\lambda_2 = 1$، حيث أن هذه القيمة المميزة مكررة مرتين، إذن

$$\mathbf{X}_3 = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \beta \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad ; \quad \beta \neq 0$$

ويكون أن المتجه المميز $\mathbf{X}_3$ ما هو الا فضاء لانهائي من المتجهات المميزة، وذلك لأن β تأخذ قيماً إختيارية ما عدا الصفر.

4.3 تحويل المصفوفة المربعة إلى مصفوفة قطرية DIAGONALIZATION

في البداية سوف نقدم تعريف لنوع هام جداً من المصفوفات يسمى المصفوفة القطرية *(diagonal matrix)*، فنتعرف على بعض خصائصها ثم ندرس كيفية تحويل أية مصفوفة مربعة إلى مصفوفة قطرية.

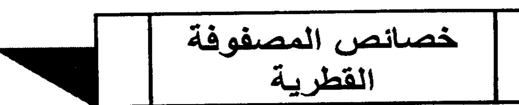
تعريف 4.2 | **المصفوفة القطرية - eigenvalue**

يقال للمصفوفة المربعة $\mathbf{D} = \left[d_{ij}\right]$ من الرتبة $n \times n$ انها مصفوفة قطرية إذا كانت كل عناصرها *(entries)* أصفار ما عدا عناصر القطر الرئيسي *(Main Diagonal)*، حيث يوجد على الأقل عنصر واحد غير صفري ضمن عناصر القطر الرئيسي.



وبلغة الرياضيات فإن المصفوفة $\mathbf{D}=\left[d_{ij}\right]$ هي مصفوفة قطرية إذا كان $d_{ij}=0$ لكل $i \neq j$. على ذلك فإذا كانـــت $\mathbf{D}=\left[d_{ij}\right]$ مصفوفة قطرية فإنها تأخذ الشكل

$$\mathbf{D}=\begin{bmatrix} d_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_{22} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & d_{nn} \end{bmatrix}$$



خصائص المصفوفة القطرية

[1] حاصل ضرب أي مصفوفتين قطريتين هو أيضا مصفوفة قطرية.

فإذا كانت $\mathbf{D}=\left[d_{ij}\right], \mathbf{H}=\left[h_{ij}\right]$ مصفوفتان قطريتين، إذن فإن

$$\mathbf{DH}=\begin{bmatrix} d_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_{22} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & d_{nn} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} h_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & h_{22} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & h_{nn} \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} d_{11}h_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_{22}h_{22} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & d_{nn}h_{nn} \end{bmatrix}$$

[2] قيمة محدد المصفوفة القطرية يساوي حاصل ضرب عناصر قطرها الرئيسي *(Main Diagonal)*. فمثلاً

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \end{bmatrix} \Rightarrow |A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \end{vmatrix} = 1 \times 2 \times 10 = 20$$

[3] إذا كانت عناصر القطر الرئيسي في المصفوفة القطرية كلها أصفار، ففي هذه الحالة تسمى بالمصفوفة الصفرية. أما إذا كان يوجد عنصر صفري واحد على الاقل ضمن عناصر القطر الرئيسي فإن المصفوفة القطرية في هذه الحالة تصبح مصفوفة شاذة *(singular matrix)*، وذلك لأنه في هذه الحالة محددها (حاصل ضرب عناصر القطر الرئيسي) تكون مساوية للصفر.

[4] إذا كانت $D = \left[d_{ij} \right]$ مصفوفة قطرية فإن معكوسها هو $D^{-1} = \left[\dfrac{1}{d_{ij}} \right]$ أي أن

$$D^{-1} = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{d_{11}} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{d_{22}} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \dfrac{1}{d_{nn}} \end{bmatrix}$$

[5] القيم المميزة لأية مصفوفة قطرية هي في الواقع عبارة عن عناصر القطر الرئيسي. على سبيل المثال فإن القيم المميزة للمصفوفة

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \end{bmatrix}$$ هي

$$\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = 2,\ \lambda_3 = 10$$

السؤال المطروح الآن هو هل يمكن لأي مصفوفة أن تتحول إلى مصفوفة قطرية؟ هل توجد شروط لذلك ؟ وكيف يتم تحويل المصفوفة إلى الشكل القطرى ؟ الاجابة عن هذه التساؤلات تقدمها النظريات الآتية.

نظرية - 4.2 تحويل المصفوفة إلى قطرية

لتكن A أية مصفوفة مربعة من الرتبة $n \times n$. لنفرض أن $\{\lambda_i\}_{i=1}^{n}$ هي القيم المميزة لهذه المصفوفة. لنفرض أن المتجهات المميزة المقابلة لهذه القيم المميزة هي $\{X_i\}_{i=1}^{n}$ وهي جميعها من الرتبة $n \times 1$. ولنفرض أيضا أن P هي المصفوفة التي تتكون من عدد n من الاعمدة، كل عمود فيها هو أحد المتجهات المميزة. إذا فإن المصفوفة A تكون قابلة لأن تكون قطرية *(diagonalizable)*،

إذا كانت وفقط إذا كانت المتجهات المميزة $\{X_i\}_{i=1}^{n}$ مستقلة خطياً *(Linearly Independent)* بحيث يكون

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{bmatrix}$$

✪✪✪

نظرية ـ 4.3

شرط أن تكون المتجهات المميزة مستقلة خطياً

لتكن A أية مصفوفة مربعة من الرتبة $n \times n$. إذا كانت القيم المميزة $\{\lambda_i\}_{i=1}^{n}$ لهذه المصفوفة كلها مختلفة *(Distinct)* وغير مكررة، فإن المتجهات المميزة $\{X_i\}_{i=1}^{n}$ المقابلة لهذه القيم المميزة وهي جميعها من الرتبة $n \times 1$ تكون مستقلة خطياً.

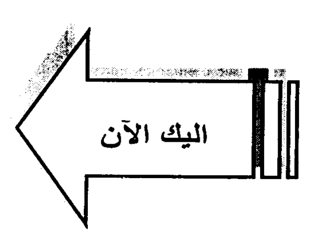
✪✪✪

نظرية ـ 4.4

شرط أن تكون المصفوفة قابلة لأن تكون قطرية

إذا كانت القيم المميزة $\{\lambda_i\}_{i=1}^{n}$ لأية صفوفة مربعة A من الرتبة $n \times n$ كلها مختلفة *(Distinct)* وغير مكررة، فإن المصفوفة A تكون قابلة لأن تكون مصفوفة قطرية.

✪✪✪



ثلاثة أمثلة،حيث تجد في المثال الأول القيم المميزة كلها مختلفة وغير مكررة، وطبقاً لنظرية (4.4) فإن المصفوفة تكون قابلة لأن تكون مصفوفة قطرية.

أيضا فإن المصفوفة P هي مصفوفة غير شاذة حيث أن المتجهات المميزة التي تكونها تكون كلها مستقلة خطياً.

في المثال الثاني توجد قيم مميزة مكررة، وطبقاً لنظرية (4.2) فإن المصفوفة تكون قابلة لأن تكون مصفوفة قطرية إذا أمكن الحصول على المتجهات المميزة التي تكون المصفوفة P بحيث تكون هذه المتجهات كلها مستقلة خطياً وبذلك تكون P مصفوفة غير شاذه.

في المثال الثالث المصفوفة المعطاه غير قابلة لأن تكون مصفوفة قطرية.

مثال 4.3 بين ما إذا كانت المصفوفات

$$A=\begin{bmatrix}5&0&0\\1&0&3\\0&0&-2\end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix}5&-4&4\\12&-11&12\\4&-4&5\end{bmatrix}, C=\begin{bmatrix}-2&0&1\\1&1&0\\0&0&-2\end{bmatrix}$$

قابلة لأن تكون قطرية، فإذا كانت قابلة للقطرية فاوجد المصفوفة غير الشاذة P والتي تحولها إلى مصفوفة قطرية.

الحل [1] بالنسبة للمصفوفة A ، نوجد أولاً القيم المميزة، فإذا كانت كلها مختلفة فحسب نظرية (4.4) فإن المصفوفة A تكون قابلة للقطرية. فإذا وجدت بعض القيم المميزة المكررة فنحاول أن نوجد المتجهات المميزة المقابلة لهذه القيم المميزة بحيث تكون مستقلة خطياً وعلى ذلك وباستخدام نظرية (4.2) نوجد المصفوفة P التي تحول المصفوفة A إلى مصفوفة قطرية. المعادلة المميزة هي

$$\begin{vmatrix} \lambda-5 & 0 & 0 \\ -1 & \lambda & -3 \\ 0 & 0 & \lambda+2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \lambda(\lambda+2)(\lambda-5) = 0$$

إذن القيم المميزة هي $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = -2, \lambda_3 = 5$ وهي جميعها مختلفة ، إذن المصفوفة A يمكن تحويلها إلى مصفوفة قطرية. نوجد أولاً المصفوفة P . المتجهات المميزة في مقابل $\lambda_1 = 0$ هي X_1، حيث $(\lambda_1 I_3 - A)X_1 = O$ أو

$$\begin{bmatrix} -5 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

باستخدام طريقة جاوس جوردان نجد أن

$$X_1 = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \alpha \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad ; \quad \alpha \neq 0$$

بنفس الطريقة فانه في مقابل $\lambda_2 = -2$ المتجهات المميزة هـــي $\mathbf{X}_2$ حيث

$$\mathbf{X}_2 = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \beta \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{-3}{2} \\ 1 \end{bmatrix} = \delta \begin{bmatrix} 0 \\ -3 \\ 2 \end{bmatrix} \;;\; \delta = 2\beta \neq 0$$

وفي مقابل $\lambda_3 = 5$ نجد أن المتجهات المميـــزة هـــي $\mathbf{X}_3$، حيـــث $(\lambda_3 \mathbf{I}_3 - \mathbf{A})\mathbf{X}_3 = \mathbf{O}$ أو

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 5 & -3 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

باعادة ترتيب معادلات النظام نحصل على

$$\begin{bmatrix} -1 & 5 & -3 \\ 0 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

بحل هذا النظام نحصل على

$$\mathbf{X}_3 = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \gamma \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \;;\gamma \neq 0$$

هكذا يمكن تكوين المصفوفة $\mathbf{P}$، بحيث يكون العمود الأول هو $\mathbf{X}_1$ والعمود الثانى هو $\mathbf{X}_2$ والعمود الثالث هو $\mathbf{X}_3$. إذن

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 5 \\ 1 & -3 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

المصفوفة العكسية للمصفوفة P هي

$$P^{-1} = \begin{bmatrix} -0.2 & 1.0 & 1.5 \\ 0.0 & 0.0 & 0.5 \\ 0.2 & 0.0 & 0.0 \end{bmatrix}$$

وهكذا نجد أن المصفوفة P تحول المصفوفة A إلى مصفوفة قطرية عناصر قطرها الرئيسي هي نفسها القيم المميزة لها، حيث يمكنك التأكد من أن

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} -0.2 & 1.0 & 1.5 \\ 0.0 & 0.0 & 0.5 \\ 0.2 & 0.0 & 0.0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 5 \\ 1 & -3 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

ملاحظة

إذا رتبت المصفوفة P بحيث يكون العمود الثاني X_3 وليس X_2، بمعنى أنه إذا كانت

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 5 & 0 \\ 1 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

فإننا نحصل على المصفوفة القطرية في الشكل

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

أي أن كل قيمة مميزة من عناصر القطـــر الرئيـــسي في المـــصفوفة القطرية $P^{-1}AP$ تكون مقابلة للعمود الذي يمثل المتجـــه المميـــز المقابل لها في المصفوفة P على الترتيب.

[2] بالنسبة للمصفوفة B، فإن المعادلة المميزة هي

$$\begin{vmatrix} \lambda-5 & 4 & -4 \\ -12 & \lambda+11 & -12 \\ -4 & 4 & \lambda-5 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \lambda^3 + \lambda^2 - 5\lambda + 3 = 0$$

إذن القيم المميزة هي

$$\lambda_1 = 1;\ \lambda_2 = 1; \lambda_3 = -3$$

حيث نجد أن القيم المميزة ليست كلها مختلفة إذ أنه توجـــد قيمـــة مكررة مرتين. المتجهات المميزة في مقابل $\lambda_1 = 1$ هي X_1 والتى تحقق المعادلة المصفوفية $(\lambda_1 I_3 - B)X_1 = O$ أو

$$\begin{bmatrix} -4 & 4 & -4 \\ -12 & 12 & -12 \\ -4 & 4 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

باستخدام طريقة جاوس جوردان ، حيث تستبدل مصفوفة المعاملات بالمصفوفة المختزلة، نجد أن النظام يتحول إلى

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

من هذا النظام نجد أن

$$x_2 = \alpha, x_3 = \beta; \quad \alpha,\beta \text{ - } scalars$$

بينما

$$x_1 - x_2 + x_3 = 0$$

إذن

$$x_1 = x_2 - x_3 = \alpha - \beta$$

وعندئذ فإن

$$\mathbf{X}_1 = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha - \beta \\ \alpha \\ \beta \end{bmatrix} \quad ; \quad \alpha,\beta \neq 0$$

بالتأكيد فإنه في مقابل $\lambda_2 = 1$ فإن المتجهات المميزة هي نفسها $\mathbf{X}_1$ ، حيث نجد أن

$$\mathbf{X}_2 = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha - \beta \\ \alpha \\ \beta \end{bmatrix} \quad ; \quad \alpha,\beta \neq 0$$

وفي مقابل $\lambda_3 = 3$ نجد أن المتجهات المميزة هي $\mathbf{X}_3$ ، حيث تحقق $\mathbf{X}_3$ المعادلة المصفوفية $(\lambda_3 \mathbf{I}_3 - \mathbf{B})\mathbf{X}_3 = \mathbf{O}$ أو

$$\begin{bmatrix} -8 & 4 & -4 \\ -12 & 8 & -12 \\ -4 & 4 & -8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

وباستخدام طريقة جاوس جوردان، حيث تستبدل مصفوفة المعاملات بالمصفوفة المختزلة، نجد أن النظام يتحول إلى

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

من هذا النظام نجد أن $x_3 = \gamma$ بينما

$$x_1 - x_3 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = x_3 = \gamma$$

أيضا فإن

$$x_2 - 3x_3 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_2 = 3x_3 = 3\gamma$$

إذن

$$\mathbf{X}_3 = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \gamma \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} \quad ; \gamma \neq 0$$

الآن لكي نكون المصفوفة $\mathbf{P}$ بحيث تكون مصفوفة غير شاذة *(Nonsingular)* أو بكلمات أخرى لكي تكون المتجهات المميزة $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \mathbf{X}_3$ مستقلة خطياً، و بما أن α, β هي كميات اختيارية

(Arbitrary). إذن نختار $\alpha = 1 , \beta = 3$ فنحصل على المتجه X_1

في الشكل $X_1 = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$.

وإذا وضعنا $\alpha = 1 , \beta = 0$ فنحصل على X_2 في الشكل

$X_2 = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$. وبما أن المتجه المميز الاساسي X_3 هو

$X_3 = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$. إذن نسطيع الآن أن نكون المصفوفة P غير

الشاذة في الشكل $P = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ حيث يمكنك التأكد أن

$$P^{-1}BP = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{8}{3} & \frac{-5}{3} & \frac{7}{3} \\ -1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & -4 & 4 \\ 12 & -11 & 12 \\ 4 & -4 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}$$

[3] المعادلة المميزة للمصفوفة C هي

$$|\lambda I_3 - C| = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} \lambda+2 & 0 & -1 \\ -1 & \lambda-1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda+2 \end{vmatrix} = 0$$

أو $(\lambda+2)^2(\lambda-1) = 0$ وبالتالي فإن القيم المميزة هي $\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = -2, \lambda_3 = -2$. إذن المتجهات المميزة في مقابل $\lambda_1 = 1$ هي X_1 ، حيث $(\lambda_1 I_3 - C)X_1 = O$ أو

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

إذن

$$X_1 = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \alpha \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad ; \quad \alpha \neq 0$$

في مقابل $\lambda_2 = -2$ فإن المتجهات المميزة هي X_2 التي تحقق المعادلة $(\lambda_2 I_3 - C)X_2 = O$ وباستخدام طريقة جاوس — جوردان يكون المطلوب حل النظام

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

حيث نحصل على

$$\mathbf{X}_2 = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \beta \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad \beta \neq 0$$

أيضاً في مقابل القيمة المميزة $\lambda_3 = 5$ نجد أن المتجهات المميزة هي $\mathbf{X}_3$ ، حيث $(\lambda_3 \mathbf{I}_3 - \mathbf{C})\mathbf{X}_3 = \mathbf{O}$ إذن وبدون تفصيلات نجد أن

$$\mathbf{X}_3 = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \beta \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad \beta \neq 0$$

هكذا نجد أنه مهما أعطيت β قيماً اختيارية ماعدا الصفر لتكوين فضاء لانهائي من المتجهات المميزة تظل المتجهات المميزة $\mathbf{X}_2, \mathbf{X}_3$ مرتبطة ببعضها خطياً أو ليست مستقلة خطياً، الأمر الذي يعني عدم امكانية تكوين المصفوفة **P** ، وذلك لأنها ستكون في هذه الحالة مصفوفة شاذه، وإذا كانت المصفوفة **P** شاذة فإنها لاتسطيع تحويل المصفوفة **C** إلى مصفوفة قطرية. إذن المصفوفة **C** غير قابلة لأن تكون مصفوفة قطرية أو أنها *(Non- Diagonalizable)*.

4.4 حل نظم المعادلات التفاضلية العادية

سنحاول الآن استخدام المفاهيم السابقة مثل القيم المميزة، المتجهات المميزة، وذلك في حل نظم المعادلات التفاضلية العادية في حالة

قابلية مصفوفة المعاملات في نظام المعادلات التفاضلية لأن تكون مصفوفة قطرية. المثال الآتي يوضح هذه الفكرة.

مثال 4.4 أوجد حل نظام المعادلات التفاضلية

$$y_1' = -y_1 + 4y_2$$
$$y_2' = 3y_2$$

الحل نضع النظام في الشكل المصفوفي $Y' = AY$، حيث

$$Y' = \begin{bmatrix} y_1' \\ y_2' \end{bmatrix}, Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}, A = \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

ويكون المطلوب الآن هو إيجاد مصفوفة العمود. المعادلة المميزة للمصفوفة A، هي $|\lambda I_2 - A| = 0$، أو

$$\begin{vmatrix} \lambda+1 & -4 \\ 0 & \lambda-3 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (\lambda+1)(\lambda-3) = 0$$

إذن القيم المميزة للمصفوفة A هي $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = 3$. المتجهات المميزة المقابلة هي

$$X_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}; X_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

وبما أن المتجهات المميزة كلها مختلفة، إذن فهي مستقلة خطياً والمصفوفة A يمكن أن تتحول إلى مصفوفة قطرية بواسطة المصفوفة P، حيث نجد أنها $P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

الآن نفرض أن

$$\mathbf{Y} = \mathbf{P\,Z} \Rightarrow \mathbf{Y}' = \mathbf{P\,Z}' \,;\; \mathbf{Z} = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix};\; \mathbf{Z}' = \begin{bmatrix} z'_1 \\ z'_2 \end{bmatrix}$$

إذن بالتعويض في النظام الأصلي $\mathbf{Y}' = \mathbf{AY}$ نحصل على المعادلات المصفوفية

$$\mathbf{P\,Z}' = \mathbf{AP\,Z} \Rightarrow \mathbf{Z}' = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{AP\,Z}$$

وبما أن

$$\mathbf{P}^{-1}\mathbf{AP} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

إذن فإن

$$\begin{bmatrix} z'_1 \\ z'_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -z_1 \\ 3z_2 \end{bmatrix}$$

هذا يعني أن $z'_1 = -z_1 \,,\, z'_2 = 3z_2$

وهذه معادلات تفاضلية عادية من الرتبة الاولى يمكن حلها بفصل المتغيرات وإجراء عملية التكامل لنحصل على

$$z'_1 = -z_1 \Rightarrow \frac{dz_1}{z_1} = -dt \Rightarrow \ln(z_1) = -t + C \Rightarrow z_1 = C_1 e^{-t}$$

$$z'_2 = 3z_2 \Rightarrow \frac{dz_2}{z_2} = 3dt \Rightarrow \ln(z_2) = 3t + C \Rightarrow z_2 = C_2 e^{3t}$$

حيث C_1, C_2 ثوابت اختيارية. في شكل مصفوفي، يمكن الحصول على المصفوفة $\mathbf{Z}$ في الشكل

$$\mathbf{Z}=\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} C_1e^{-t} \\ C_2e^{3t} \end{bmatrix}$$

وبما أن المطلوب هو ايجاد المصفوفة $\mathbf{Y}$ ، حيث $\mathbf{Y}=\mathbf{PZ}$ ، إذن

$$\mathbf{Y}=\mathbf{PZ}=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} C_1e^{-t} \\ C_2e^{3t} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} C_1e^{-t}+C_2e^{3t} \\ C_2e^{3t} \end{bmatrix}$$

إذن الحل العام للنظام المعطى هو

$$y_1=C_1e^{-t}+C_2e^{3t},\ y_2=C_2e^{3t}$$

مثال 4.5 اوجد حل نظام المعادلات التفاضلية

$$y_1'=y_1-y_2+2y_3$$
$$y_2'=3y_1+4y_3$$
$$y_3'=2y_1+y_2$$

الحل نضع النظام في الشكل المصفوف $\mathbf{Y}'=\mathbf{AY}$ ، حيث

$$\mathbf{Y}'=\begin{bmatrix} y_1' \\ y_2' \\ y_3' \end{bmatrix},\mathbf{Y}=\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix},\mathbf{A}=\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 4 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

ويكون المطلوب الآن هو إيجاد مصفوفة العمود. المعادلة المميزة للمصفوفة $\mathbf{A}$ ، هي $|\lambda \mathbf{I}_3-\mathbf{A}|=0$ ، أو

$$\begin{vmatrix} \lambda-1 & 1 & -2 \\ -3 & \lambda & -4 \\ -2 & -1 & \lambda \end{vmatrix}=0$$

أي أن

$$(\lambda\text{-}1)\left[\lambda^2-4\right]-\left[-3\lambda-8\right]-2\left[3+2\lambda\right]=0$$

إذن القيم المميزة للمصفوفة A هي

$$\lambda_1=2,\ \lambda_2=\frac{\left(-1-\sqrt{13}\right)}{2},\ \lambda_3=\frac{\left(-1+\sqrt{13}\right)}{2}$$

المتجهات المميزة المقابلة هي

$$X_1=\begin{bmatrix}0\\2\\1\end{bmatrix};\ X_2=\begin{bmatrix}-5-\sqrt{13}\\-2\sqrt{13}\\7+\sqrt{13}\end{bmatrix},\ X_3=\begin{bmatrix}-5+\sqrt{13}\\2\sqrt{13}\\7-\sqrt{13}\end{bmatrix}$$

وبما أن المتجهات المميزة كلها مختلفة، إذن فهي مستقلة خطياً والمصفوفة A يمكن أن تتحول إلى مصفوفة قطرية بواسطة المصفوفة P، حيث نجد أنها

$$P=\begin{bmatrix}0 & -5-\sqrt{13} & -5+\sqrt{13}\\2 & -2\sqrt{13} & 2\sqrt{13}\\1 & 7+\sqrt{13} & 7-\sqrt{13}\end{bmatrix}$$

الآن نفرض أن

$$Y=P\,Z\Rightarrow\ Y'=P\,Z'\ ;\ Z=\begin{bmatrix}z_1\\z_2\\z_3\end{bmatrix};\ Z'=\begin{bmatrix}z'_1\\z'_2\\z'_3\end{bmatrix}$$

إذن بالتعويض في النظام الاصلي $Y'=AY$ نحصل على الأنظمة

$$\mathbf{P\,Z'} = \mathbf{AP\,Z} \Rightarrow \mathbf{Z'} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{AP\,Z}$$

وبما أن

$$\mathbf{P}^{-1}\mathbf{AP} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{\left(-1-\sqrt{13}\right)}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{\left(-1+\sqrt{13}\right)}{2} \end{bmatrix}$$

إذن فإن

$$\begin{bmatrix} z'_1 \\ z'_2 \\ z'_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{\left(-1-\sqrt{13}\right)}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{\left(-1+\sqrt{13}\right)}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2z_1 \\ \dfrac{\left(-1-\sqrt{13}\right)}{2} z_2 \\ \dfrac{\left(-1+\sqrt{13}\right)}{2} z_3 \end{bmatrix}$$

هذا يعني أن

$$z'_1 = 2z_1 \;,\; z'_2 = \frac{\left(-1-\sqrt{13}\right)}{2} z_2 ,\; z'_3 = \frac{\left(-1+\sqrt{13}\right)}{2} z_3$$

وهذه معادلات تفاضلية عادية من الرتبة الاولى يمكن حلها بفصل المتغيرات وإجراء عملية التكامل لنحصل على

$$\mathbf{z}'_1 = 2\mathbf{z}_1 \Rightarrow \mathbf{z}_1 = ae^{2t}$$

$$z_2' = \frac{\left(-1-\sqrt{13}\right)}{2} z_2 \Rightarrow z_2 = be^{\frac{\left(-1-\sqrt{13}\right)}{2}t}$$

$$z_3' = \frac{\left(-1+\sqrt{13}\right)}{2} z_3 \Rightarrow z_3 = ce^{\frac{\left(-1+\sqrt{13}\right)}{2}t}$$

حيث a,b,c ثوابت اختيارية. في شكل مصفوف، يمكن الحصول على المصفوفة Z في الشكل

$$\mathbf{Z} = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ae^{2t} \\ be^{\frac{\left(-1-\sqrt{13}\right)}{2}t} \\ ce^{\frac{\left(-1+\sqrt{13}\right)}{2}t} \end{bmatrix}$$

وبما أن المطلوب هو ايجاد المصفوفة Y ، حيث $\mathbf{Y} = \mathbf{PZ}$ ، إذن

$$\mathbf{Y} = \mathbf{PZ} = \begin{bmatrix} 0 & -5-\sqrt{13} & -5+\sqrt{13} \\ 2 & -2\sqrt{13} & 2\sqrt{13} \\ 1 & 7+\sqrt{13} & 7-\sqrt{13} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ae^{2t} \\ be^{\frac{\left(-1-\sqrt{13}\right)}{2}t} \\ ce^{\frac{\left(-1+\sqrt{13}\right)}{2}t} \end{bmatrix}$$

إذن الحل العام للنظام المعطى هو

$$y_1=\left(-5-\sqrt{13}\right)be^{\frac{\left(-1-\sqrt{13}\right)}{2}t}+\left(-5+\sqrt{13}\right)ce^{\frac{\left(-1+\sqrt{13}\right)}{2}t}$$

$$y_2=2ae^{2t}-2\sqrt{13}be^{\frac{\left(-1-\sqrt{13}\right)}{2}t}+2\sqrt{13}ce^{\frac{\left(-1+\sqrt{13}\right)}{2}t};$$

$$y_3=ae^{2t}+\left(7+\sqrt{13}\right)be^{\frac{\left(-1-\sqrt{13}\right)}{2}t}+\left(7-\sqrt{13}\right)ce^{\frac{\left(-1+\sqrt{13}\right)}{2}t}$$

4.5 مسائل

(1) أوجد القيم المميزة والمتجهات المميزة للمصفوفات الآتية

$\begin{bmatrix}1 & -1\\ 2 & 3\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}0 & 0\\ -4 & 1\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}5 & -2\\ 10 & 3\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}4 & 5\\ 7 & 6\end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix}0 & 2 & -1\\ 0 & 1 & 2\\ 1 & 0 & -3\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}5 & 8 & 1\\ 0 & 1 & 2\\ 0 & 3 & -3\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 2\\ 1 & 0 & 1\end{bmatrix}$

(2) بين ما إذا كانت المصفوفات الآتية قابلة لأن تكون مصفوفات قطرية *(Diagonalizable)*، فإذا كانت كذلك فأوجد المصفوفة غير الشاذة P والتي تحولها إلى مصفوفة قطرية.

$\begin{bmatrix}0 & -1\\ 4 & 3\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}1 & 0\\ -4 & 1\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}5 & -2\\ 0 & 3\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}4 & 0\\ 2 & 1\end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} -4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 5 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -3 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 8 & -7 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$
$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

(2) أوجد حلول نظم المعادلات التفاضلية الخطية باستخدام مفاهيم القيم المميزة والمتجهات المميزة

$y_1' = -4y_1 + 3y_2$ $y_2' = 2y_1 - 3y_2$	$y_1' = 5y_1 - 4y_2 + 4y_3$ $y_2' = 12y_1 - 11y_2 + 12y_3$ $y_3' = 4y_1 - 4y_2 + 5y_3$
$y_1' = 5y_1 - y_2$ $y_2' = -2y_2$ $y_3' = 8y_1 + 7y_2$	$y_1' = y_2 + y_3$ $y_2' = 2y_1 - 3y_3$ $y_3' = y_1 + y_2$
$y_1' = 5y_2 - y_3$ $y_2' = -2y_3$ $y_3' = 8y_1 + 7y_2$	$y_1' = 2y_2 + y_3$ $y_2' = 4y_1 - 3y_3$ $y_3' = y_1 - y_2$
$y_1' = y_1 - y_2$ $y_2' = y_1$ $y_3' = 8y_1 + 7y_2$	$y_1' = -2y_2 + y_3$ $y_2' = 2y_1 - y_3$ $y_3' = y_1 + 6y_2$

****

5 نظـــــم المعادلات الجبرية الخطية

Linear Systems of Algebraic Equations

في هذا الباب نلقي الضوء على موضوع هام جداً، ألا وهو نظـــم المعادلات الجبرية الخطية. وأهمية هذا الموضوع تكمن في حقيقة أن الحلول العلمية لأية مشكلة هندسية أو رياضية تؤول في النهاية ـــ في معظم الأحيان ـــ إلى حلول أنظمة من المعادلات الجبرية.

هذه الأنظمة يوجد منها نوعان. النوع الأول هو الـــنظم الخطيـــة *(Linear System)*، وهو موضوع هذا الباب، أما النوع الثـــاني فهي النظم غير الخطية *(Non-Linear System)*.

في هذا الباب نتعرف على نوعيات مختلفة من النظم الخطية مثـــل نظم المعادلات المتجانـــسة *(Homogeneous)*، والـــنظم غـــير المتجانسة *(Non Homogeneous)*، النظم المربعة (عدد المعادلات يساوي عدد المجاهيل)، والنظم المستطيلة (عدد المعادلات لايساوي عدد المجاهيل)، كما نتعرف ـــ أيضاً ـــ على طرق الحل المختلفة، التي تناسب كل نظام.

وتجدر الإشارة إلى أنه يوجد مدخلان لإيجـــاد الحلـــول لأنظمـــة المعادلات الجبرية الخطية. المدخل الأول يعـــرف باســـم الطـــرق المباشرة *(Direct Methods)*، وهو ما سوف نتطرق إليه بالدراسة في هذا الباب. المدخل الثانى يعرف باســـم الطـــرق التكراريـــة

(iterative methods) وسوف نتعرض له في الباب السادس. هذا، ومن الجدير بالملاحظة ــ أيضاً ــ أن معظــم الطــرق المقدمــة للحصول على حلول نظم المعــادلات تعتمــد علــى مفــاهيم المصفوفات التي يمكن اعتبارها حجر الزاوية الذي تعتمد عيه معظم طرق الحلول.

5.1 نظم المعادلات الجبرية الخطية

نظام المعادلات الجبرية الخطية هو عبارة عن عدد مــن المعــادلات الجبرية الخطية في عدد من المجاهيل، ويكون حل النظام هو معرفــةا قيم هذه المجاهيل. والنظم الخطيــة هنــا تعــني أن كــل مجهــول *(Unknown)*، x_j، يظهر مرفوعاً للقوى الأولى ــ فقط ــ كمــا أنه لايظهر في النظام أي من الحدود، التي علــى الــشكل $x_i x_j$، حيثما يكون $i \neq j$. هذا، ويمكن التعرف على الشكل العام لنظــام المعادلات الجبرية الخطية، الذي يتكون من عدد n معادلة خطية، في عدد m مجهول كما في الصورة الرياضية

$$\begin{array}{ccccc} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + & \cdots & + a_{1m}x_m & = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + & \cdots & + a_{2m}x_m & = b_2 \\ \vdots \quad\quad \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + & \cdots & + a_{nm}x_m & = b_n \end{array} \tag{5.1}$$

بالطبع فإن المعـــاملات *(Coefficients)* ، a_{ij}، حيـــث $i = \overline{1,n}$، $j = \overline{1,m}$ ، وكذلك الحدود الثابتة أو المطلقـــة *(Free Terms)* ، b_i، حيث $i = \overline{1,n}$ تكون معطاة، أما x_j حيث $j = \overline{1,m}$ فهـــي المجاهيل المطلوب الحصول على قيمها. ويكون الحل المطلوب لهـــذا النظام هو إيجاد قيم هذه المجاهيل x_m, ... x_2، x_1، التي تحقق كل معادلات النظام.

في الحقيقة توجد عدة طرق للحصول على حل أنظمـــة المعـــادلات الجبرية الخطية. وُتستخدم المصفوفات بشكل أساســـي في معظـــم الطرق، التي تبحث عن حلول النظم الخطية. لكن ـــ وقبل البدء في التعامل مع هذه الطرق ـــ نضع ـــ أولاً ـــ النظام (5.1) في الشكل المصفوفي *(Matrix Form)*

$$\mathbf{AX} = \mathbf{B} \tag{5.1}$$

حيث

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}; \ \mathbf{X} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}; \mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{bmatrix}$$

المصفوفة A والتي من الرتبة $n \times m$ تسمى **"مصفوفة المعاملات"** *(Coefficient Matrix)*، حيث يعبر n عن عدد الصفوف، بينمـــا

يعبر m عن عدد الأعمدة. أما المصفوفة X من الرتبة $n \times 1$ فتسمى "**مصفوفة المجاهيل**". والمصفوفة B من الرتبة $n \times 1$ تسمى "**مصفوفة الثوابت**" أو مصفوفة الحدود المطلقة، وأحياناً تسمى مصفوفة الهدف *(Target Matrix)*.

هذا، وتنقسم نظم المعادلات الجبرية الخطية طبقاً لشكل مصفوفة الهدف إلى نوعين من النظم، النوع الأول هو النظم المتجانسة إذا كانت مصفوفة الهدف صفرية، والنوع الثانى هي النظم غير المتجانسة إذا كانت مصفوفة الهدف غير صفرية.

وُتعرَّف النظم غير المتجانسة بأنها تلك النظم التي على الشكل (5.1) أو الشكل المصفوفي (5.2) بشرط أن يوجد على الأقل عنصر واحد من مصفوفة الهدف B لايساوي الصفر. هذا، ونظم المعادلات المتجانسة وغير المتجانسة ـــ هي نفسها ـــ تنقسم إلى حالتين، الحالة الأولى إذا كان عدد المعادلات لايساوي عدد المجاهيل، والثانية إذا كان عدد المعادلات يساوي عدد المجاهيل.

انتبه !! إلى الفروق بين النظم المتجانسة، والنظم غير المتجانسة. من جهة وجود الحل وشكله.

<u>بالنسبة للنظم المتجانسة نجد أنه :</u>

(1) إذا تساوى عدد المعادلات مع عدد المجاهيل، وكانت مـــصفوفة المعاملات غير شاذة بمعنى أن $|A| \neq 0$ ففي هذه الحالـــة لايوجـــد للنظام إلا الحلول الصفرية فقط *(Trivial Solutions)*.

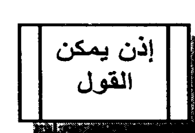
(2) وإذا تساوى عدد المعادلات مع عدد المجاهيل وكانت مصفوفة المعاملات شاذة *(Singular)* $|A| = 0$ أو إذا كان $rank\,(A) < n$ حيث يرمز n لعدد معادلات النظام، $rank\,(A)$ هي رتبة المصفوفة A فإن النظام في هذه الحالة له عدد لانهائي من الحلول، بالإضـــافة إلى الحلول الصفرية.

<u>بالنسبة للنظم غير المتجانسة فنجد أنه :</u>

(1) إذا كان عدد المعادلات يساوي عدد المجاهيل، وكانت مصفوفة المعاملات غير شاذة، بمعنى أن يكون $|A| \neq 0$، فإنه يوجد حل وحيد *(Unique Solution)*. فإذا كان عدد المعادلات يـــساوي عـــدد المجاهيل وكانت مصفوفة المعاملات شاذة $|A| = 0$ فلايوجـــد حـــل على الإطلاق.

(2) وإذا كان عدد المعادلات أقل أو أكبر من عدد المجاهيل ففـــي هذه الحالة فإنه يوجد عدد لانهائي من الحلول، بـــشرط أن رتبـــة *(rank)* المصفوفة A تساوي رتبـــة *(rank)* المـــصفوفة الموســـعة

(augmented matrix) $[A|B]$ أي يـــــــــــــشرط أن $rank\,[A|B] = rank\,(A)$ كما سنرى.



أن للنظم المتجانسة ــ دائماً ــ يوجد حل (على الأقـــل الحل الصفري). على عكس النظم غير المتجانسة، والـــتي ليس من الضروري أن يكون لها حل دائماً.

هذا

وسوف نقدم الآن طريقة الحصول على الحـــل العـــام للنظم الخطية باستخدام طريقة تعتبر من أهم وأفضل الطرق المباشرة لحل أنظمة المعادلات الخطية المتجانسة وغير المتجانسة علـــى حـــد سواء. وهذه الطريقة الرائعة صالحة للاستخدام في حالة تساوي عدد المعادلات مع عدد المجاهيل وفي حالة عدم التساوي، وهي تـــسمى

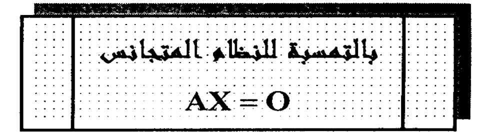
<u>"طريقـــــة جـــاوس ــ جـــوردان الاختزاليـــة"</u>

(Gauss - Gordan Reduction Method)، نـــسبة إلى العـــالمين الجلـــيلين جـــاوس *(Gauss, C.F., 1777-1855)* وجـــوردان *(Jordan, C. M., 1838-1922)*. وقد سميت الطريقة بالاختزاليـــة لأنها تعتمد ــ بالأساس ــ على المـــصفوفة الاختزاليـــة. إذ يـــتم استبدال نظـــام المعـــادلات $A_R X = B_R$ ــ مـــثلاً ــ بالنظـــام $AX = B$، حيث المصفوفة A_R هي المصفوفة الاختزالية لمـــصفوفة

المعاملات A ، والمصفوفة B_R هي المصفوفة المختزلـــة لمـــصفوفة الثوابت B .

5.2 طريقة جاوس - جوردان Gauss - Jordan

يمكن استخدام طريقة جاوس ــــ جوردان لحل النظم المتجانـــسة والنظم غير المتجانسة على حد سواء، وهي تتكون من عدة خطوات على النحو التالي:



بالنسبة للنظام المتجانس

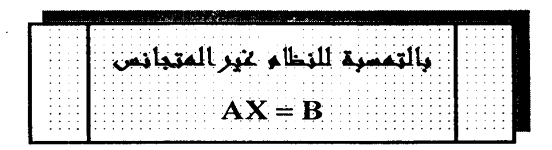
$AX = O$

(1) يتم اختزال مصفوفة المعاملات A إلى المصفوفة المختزلة A_R وعندئذٍ فإن حل النظام $AX = O$ يكافيء حل النظام $A_R X = O$.

(2) إذا كان العنصر الدليل، أي الواحد الصحيح والموجـــود في أي صف في المصفوفة المختزلة A_R ، يقع في العمود رقم j في المصفوفة A_R ، فإن المتغير x_j يعتبر متغير تـــابع ***(dependent variable)***، وإلا فإن x_j يسمى بالمتغير المستقل ***(independent variable)***.

(3) يُعَبرعن كل متغير تابع بدلالة المـــتغيرات المـــستقلة، وتوضـــع مصفوفة (عمود) الحلول على شكل مصفوفي.

(4) المتغيرات (المجاهيل) المستقلة تُعطَى أية قيم أختياريـــة، ومـــن ثم نوجد حل النظام باستخدام الخطوة رقم (3).



(1) يتم اختزال المصفوفة الموسعة $\left[A|B\right]$ حيث A هي مصفوفة المعاملات بينما B هي مصفوفة الثوابت إلى المـــصفوفة المختزلـــة $\left[A|B\right]_R$ وعندئذٍ فإن حل النظام $AX = B$ يكافيء حل النظـــام $A_R X = B_R$.

(2) إذا كانت رتبة *(rank)* المصفوفة A تـــساوي رتبـــة *(rank)* المصفوفة الموسعة $\left[A|B\right]$ فإن للنظام يوجد حل فإذا لم يتساويا فإنه لايوجد للنظام حل *(no solution)*.

(3) إذا كان العنصر الدليل، أي الواحد الصحيح والموجـــود في أي صف في المصفوفة المختزلة A_R، يقع في العمود رقم j في المصفوفة A_R، فإن المتغير x_j يعتبر متغير تـــابع *(dependent variable)*، وإلا فإن x_j يسمى بالمتغير المستقل *(independent variable)*.

(4) يُعَبرعن كل متغير تابع بدلالة المـــتغيرات المـــستقلة، وتوضـــع مصفوفة (عمود) الحلول على شكل مصفوفي.

(5) المتغيرات (المجاهيل) المستقلة تُعطَى أية قيم أختياريـــة، ومـــن ثم نوجد حل النظام باستخدام الخطوة رقم (3).

5.3 النظم المتجانسة - Homogeneous Systems

نظام المعادلات الجبرية الخطية المتجانس هو عبارة عن عـــدد مـــن المعادلات الجبرية الخطية في عدد من المجاهيل بحيث أن الحدود الثابتة في جميع المعادلات أصفار. بكلمات أخرى المصفوفة B في النظـــام المتجانس هي مصفوفة صفرية. لنعتبر النظام المتجانس

$$
\begin{array}{l}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1m}x_m = 0 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2m}x_m = 0 \\
\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \\
a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nm}x_m = 0
\end{array} \tag{5.3}
$$

وإذا وضعنا هذا النظام في شكل مصفوفي، فإنـــه يأخـــذ الـــشكل المختصر والجميل

$$AX = O \tag{5.4}$$

حيث

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad O = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

بالطبع فإن A هي مصفوفة المعـــاملات، المــصفوفة X مــصفوفة المجاهيل، والمصفوفة O هي مصفوفة الثوابت. كما أن عدد صفوف المصفوفة A يعبر عن عدد معادلات النظام، بينما يعبر عدد الأعمدة عن عدد المجاهيل. ويكون الحل العام للنظام ما هو إلا قـــيم هـــذه المجاهيل x_m , ... ,x_2 ,x_1، والتي تحقق كل معادلات النظام.

وللحصول على حل النظام (5.4) نتعرض هنا لحالتين، الحالة الأولى عندما يكون عدد المعادلات n أقل من عدد المجاهيل m، أي عندما $m > n$، والحالة الثانية عندما يتساوى عدد المعادلات مـــع عـــدد المجاهيل أو عندما $m = n$.

الحالة الأولى — **عدد المعادلات أقل من عدد المجاهيل في النظام المتجانس**

لإيجاد الحل العام لنظام المعادلات الخطية المتجانس في الحالـــة الـــتي يكون فيها عدد المعادلات أقل من عدد المجاهيل، أي عندما يكـــون $m > n$، حيث n هو عدد المعادلات بينما m هو عدد المجاهيـــل، فإننا نستخدم طريقة جاوس ـــــ جوردان الاختزالية، والتي تضمن وجود عدد لانهائي من الحلول، بالإضافة إلى الحلول الصفرية. لكن على أية حال ـــ وقبل البدء في تطبيق هذه الطريقة عملياً ـــ يجـــب التعرف على النظرية الآتية.

نظرية 5.1 عن حل النظم المتجانسة

(1)إذا كانت A مصفوفة مـن الرتبـة $n \times m$، وكانـت A_R مصفوفتها المختزلة، إذن فإن حل نظام المعادلات $AX = O$ يكافيء حل النظام $A_R X = O$.

(2) إذا كانت المصفوفة A من الرتبة $n \times m$، إذن فإن عدد الحلول الأساسية *(Fundamental Solutions)*، المستقلة أو غير المرتبطـة خطياً *(Linearly Independent)* أو ـ بمعـنى آخـر ـ عـدد الكميات القياسية الاختيارية *(Arbitrary Scalars)*، والتي تكـوّن فضاء الحلول اللانهائي في حل النظام المتجانس $AX = O$ يـساوي العدد r حيث $r = m - rank(A)$، m هو عدد مجاهيل النظام.

✪✪✪

مثال 5.1 أوجد الحل العام للنظام المتجانس

$$\begin{aligned} x_1 - 3x_2 + x_3 - 7x_4 + 4x_5 &= 0 \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 &= 0 \\ x_2 - 4x_3 + x_5 &= 0 \end{aligned} \qquad \text{(i)}$$

الحل من الواضح أنه يوجد في النظام (i) عدد 5 مجهول $m = 5$ وعدد 3 معادلة $n = 3$، أي أن عدد المعادلات أقل من عدد المجاهيل. نضع النظام (i) على شكل المعادلة المصفوفية $AX = O$ فنحصل على



$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & 1 & -7 & 4 \\ 1 & 2 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \text{(ii)}$$

حيث

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 1 & -7 & 4 \\ 1 & 2 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 0 & 1 \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix}, O = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

فنجد أن

$$A_R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -\frac{35}{16} & \frac{13}{16} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{28}{16} & -\frac{20}{16} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{7}{16} & -\frac{9}{16} \end{bmatrix}$$

وحيث أن عدد الصفوف غير الصفرية في المصفوفة المختزلة، A_R يساو ي العدد 3، إذن فإن مرتبة المصفوفة A هو العـــدد 3، أو ــ بالأحرى ــ فإن $rank(A) = 3$. وحسب الجـــزء الثـــانى مـــن النظرية (5.1) فإن عدد الحلـــول الأساســـية هـــو $r = 3$ حيـــث $r = m - rank(A) = 5 - 3 = 2$.

الآن، وحسب الجزء الأول من النظرية (5.1) ــ نجد أن حل النظام المعطى يكافيء حل النظام $A_R X = O$، أي حل النظام

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -\frac{35}{16} & \frac{13}{16} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{28}{16} & -\frac{20}{16} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{7}{16} & -\frac{9}{16} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

من الخطـــوة (2) مـــن طريقـــة جـــاوس ـــ جـــوردان نجـــد أن (x_1, x_2, x_3) مجاهيل تابعة، (x_4, x_5) مجاهيل مـــستقلة. ومـــن الخطوة (3) يعُبر عن (x_1, x_2, x_3) بدلالة (x_4, x_5)، إذن

$$\left.\begin{aligned} x_1 - \frac{35}{16}x_4 + \frac{13}{16}x_5 = 0 \\ x_2 + \frac{28}{16}x_4 - \frac{20}{16}x_5 = 0 \\ x_3 + \frac{7}{16}x_4 - \frac{9}{16}x_5 = 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} x_1 &= \frac{35}{16}x_4 - \frac{13}{16}x_5 \\ x_2 &= -\frac{28}{16}x_4 + \frac{20}{16}x_5 \\ x_3 &= -\frac{7}{16}x_4 + \frac{9}{16}x_5 \end{aligned} \qquad \text{(iii)}$$

إذا اعتبرنا ـــ الآن ـــ أن $x_4 = x_4 + 0,\ x_5 = x_5 + 0$، وقمنـــا بالتعويض عن المجاهيل (x_1, x_2, x_3) من المعادلات (iii) فإنه يمكننا تكوين مصفوفة لكل المجاهيل $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ في الشكل

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{35}{16}x_4 - \frac{13}{16}x_5 \\ -\frac{28}{16}x_4 + \frac{20}{16}x_5 \\ -\frac{7}{16}x_4 + \frac{9}{16}x_5 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = x_4 \begin{bmatrix} \frac{35}{16} \\ -\frac{28}{16} \\ -\frac{7}{16} \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_5 \begin{bmatrix} -\frac{13}{16} \\ \frac{20}{16} \\ \frac{9}{16} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

الخطوة رقم (4) من طريقة جاوس ـــــ جوردان الاختزالية تُعطـــي قيماً اختيارية للمجاهيل المستقلة (x_4, x_5)، فإذا فرضنا ـــ مثلاً ـــ أن $x_4 = \alpha, x_5 = \beta$ ، فإن المصفوفة X تصبح على الشكل

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \alpha \begin{bmatrix} \frac{35}{16} \\ -\frac{28}{16} \\ -\frac{7}{16} \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} -\frac{13}{16} \\ \frac{20}{16} \\ \frac{9}{16} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = a \begin{bmatrix} 35 \\ -28 \\ -7 \\ 16 \\ 0 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} -13 \\ 20 \\ 9 \\ 0 \\ 16 \end{bmatrix} \quad \text{(iv)}$$

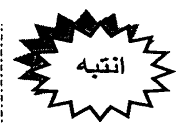
حيث

$$a = \frac{1}{16}\alpha, \quad b = \frac{1}{16}\beta$$

من الواضح أنه توجد هنا كميتان اختياريتان قياســـيتين همـــا a,b وعلى هذا فإن هذا الحل ليس حلاً وحيداً، بل هو فضاء لانهائي من الحلول. إذ أنه كلما تغيرت قيم a,b لتأخذ قيماً اختيارية، يـــتغير الحل تبعاً لذلك، لنحصل في النهاية على عدد لانهائي من الحلـــول، مكوناً ما يسمى "فضاء الحلول" *(space of solutions)*.

هذا الفضاء من الحلول بُعده *(dimension)* هو في الواقـــع عـــدد الثوابت القياسية الاختيارية a,b. ففي هذا المثـــــــال مثلاً، بُعد فضاء الحلول هو العدد 2.

✍.



في حالة ما إذا كان $a = b = 1$ فإن الحل يصبح على الشكل

$$X = \begin{bmatrix} 35 \\ -28 \\ -7 \\ 16 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -13 \\ 20 \\ 9 \\ 0 \\ 16 \end{bmatrix}$$

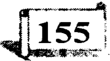
العمودان (المصفوفتان)

$$\begin{bmatrix} -13 \\ 20 \\ 9 \\ 0 \\ 16 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 35 \\ -28 \\ -7 \\ 16 \\ 0 \end{bmatrix}$$

المكونان لمصفوفة الحل X يسميان "الحلـين الأساسـيين" لنظـام المعادلات الخطية الجبرية المعطى، وهما بالتأكيـد مـصفوفتان غـير مرتبطتين خطياً.

مثال 5.2 أوجد الحل العام للنظام المتجانس

$$-x_1 + x_3 + x_4 + 2x_5 = 0$$
$$x_2 + 3x_3 + 4x_5 = 0$$
$$x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 0$$
$$-3x_1 + x_2 + 4x_5 = 0$$



الحل من الواضح في هذا النظام المتجانس أنه يوجد عدد 5 مجهول، وعدد 4 معادلة. أي أن عدد المعادلات أقل من عدد المجاهيل. نضع — أولاً — النظام على شكل المعادلة المصفوفية $AX = O$، إذن

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ -3 & 1 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

حيث نجد أن

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ -3 & 1 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \to A_R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -\frac{9}{8} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{5}{8} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{9}{8} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{2}{8} \end{bmatrix}$$

وحيث أن عدد الصفوف غير الصفرية في المصفوفة المختزلة A_R يساوي العدد 4، إذن فإن $rank(A) = 4$، وحسب الجزء الثاني من النظرية (5.1) فإن عدد الكميات القياسية الاختيارية في فضاء الحلول المتوقع يساوي $m - rank(A) = 5 - 4 = 1$.

الآن، وحسب الجزء الأول من النظرية (5.1) — نجد أن حل النظام المعطَى $AX = O$ يكافيء حل النظام $A_R X = O$، أي النظام

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -\frac{9}{8} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{5}{8} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{9}{8} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{2}{8} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

من الخطوة الثانية من طريقة جــاوس ـــــــ جــوردان نجــد أن x_1, x_2, x_3, x_4 هي مجاهيل تابعة، بينما x_5 هو المجهول الوحيــد المستقل. وبواسطة الخطوة رقم 3، يمكن أن نحصل علــى المجاهيــل x_1, x_2, x_3, x_4 بدلالة المجهول x_5 .

إذا وضعنا $x_5 = \alpha$، حيث α كمية قياسية أختيارية فإن مصفوفة كل المجاهيل أو مصفوفة الحلول تأخذ عندئذٍ الشكل

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \alpha \begin{bmatrix} \frac{9}{8} \\ -\frac{5}{8} \\ -\frac{9}{8} \\ \frac{2}{8} \\ 1 \end{bmatrix} = \beta \begin{bmatrix} 9 \\ -5 \\ -9 \\ 2 \\ 8 \end{bmatrix} \quad ; \beta = \frac{1}{8}\alpha$$

مثال 5.3 أوجد الحل العام للنظام $x_1 + 2x_2 + x_3 = 0$

الحل من الواضح في هذا النظام المتجانس أنه يوجد عـــدد 3 مجهـــول، ومعادلة واحدة. أي أن عدد المعادلات أقل من عدد المجاهيل. نضع ـــ أولاً ـــ النظام على شكل المعادلة المصفوفية $\mathbf{AX}=\mathbf{O}$ ، إذن

$$\begin{bmatrix}1 & 2 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\end{bmatrix}$$

حيث $\mathrm{A}=\begin{bmatrix}1 & 2 & 1\end{bmatrix}$ هي مصفوفة المعاملات. يمكن الآن إيجـــاد المصفوفة المختزلة $\mathrm{A_R}$ للمـــصفوفة A لنجـــد أنهـــا المـــصفوفة $\mathrm{A_R}=\begin{bmatrix}1 & 2 & 1\end{bmatrix}$ ، وبالتالي فإن $\textit{rank}\left(\mathrm{A}\right)=1$. وحسب النظرية (5.1) فإن عدد الكميات القياسية الاختيارية في فـــضاء الحلـــول يساوي $m-rank\left(A\right)=3-1=2$. من الخطوة رقـــم (2) مـــن طريقة جاوس ـــــ جوردان نجد أن المتغير x_1 هو المجهول الوحيد التابع، بينما x_2,x_3 هما مجاهولان مستقلان. ومن الخطوة رقـــم 3 نحصل على المجهول x_1 بدلالة المجاهيل x_2,x_3 ، وبما أنـــه يمكـــن اعتبار أن $x_2=\alpha,x_3=\beta$ ، حيث α,β كميات قياسية أختيارية إذن فإن مصفوفة المجاهيل أو مصفوفة الحلول هي

$$\mathbf{X}=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2x_2-x_3\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2\alpha-\beta\\\alpha+0\beta\\0\alpha+\beta\end{bmatrix}=\alpha\begin{bmatrix}-2\\1\\0\end{bmatrix}+\beta\begin{bmatrix}-1\\0\\1\end{bmatrix}$$

أو

$$X=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\alpha\begin{bmatrix}-2\\1\\0\end{bmatrix}+\beta\begin{bmatrix}-1\\0\\1\end{bmatrix}$$

الحالة الثانية — **عدد المعادلات يساوي عدد المجاهيل في النظام المتجانس**

لإيجاد حل النظام الخطي المتجانس في هذه الحالة، والتي فيها يكون عدد المعادلات مساوياً عدد المجاهيل، بمعنى أن $m=n$، حيث n هو عدد المعادلات، m هو عدد المجاهيل. فإننا ــ أيضاً ــ نستخدم طريقة جاوس ــــ جوردان.

ولكن قبل البدء في تطبيق هذه الطريقة على بعض الأمثلة، نقدم النظريتين الآتيتين لما لهما من أهمية كبيرة في تحديد ماهية وطبيعة الحلول في هذه الحالة كما سيتبين ذلك في حل بعض الأمثلة.

نظرية 5.2 — **عن حل النظم المربعة المتجانسة**

إذا كانت A مصفوفة مربعة من الرتبة $n\times n$، وكان $rank\,(A)=n$، إذن فإن حل النظام المتجانس $AX=O$ هو الحل الصفري $X=O$ حيث O هي المصفوفة الصفرية من الرتبة n.

✪✪✪

بكلمات اخرى

إذا كانت المصفوفة المربعة A غير شـــاذة ($|A| \neq 0$) أو إذا كـــان $A_R = I_n$. فإن حل النظام المتجانس $AX = O$ هو الحل $X = O$ والذي يسمى بالحل البديهي أو الحل الصفري .

البرهان

لنفرض أن $rank(A) = n$، إذن فـــإن $A_R = I_n$، ويكون حل النظام $AX = O$ هو نفسه حل النظـــام $A_R X = O$.

بما أن $A_R = I_n$ إذن فإن حل النظام $AX = O$ هو نفـــسه حـــل النظام $I_n X = O$، وهذا يعني أن $AX = O$.

وبالعكس؛ إذا كان حل النظام $AX = O$ هـــو الحـــل الـــصفري $X = O$، فهذا يعني أن عدد الكميات القياسية يساوي صفراً. ومن النظرية (5.1)، نجـــد أن $r = m\text{-}rank(A) = 0$، ومنـــها فـــإن $rank(A) = n$، وذلك لأن $m = n$.

نظرية 5.3 عن حل النظم المربعة المتجانسة

إذا كانت A مصفوفة مربعة من الرتبة $n \times n$، بالإضافة إلى كونها مصفوفة شاذة، بمعنى أن $|A| = 0$، أو إذا كـــان $rank(A) < n$،

إذن فإنه يوجد للنظام الخطي المتجـــانس $AX = O$ حلـــول غـــير صفرية (*Non-trivial Solutions*).

✪✪✪

مثال 5.4 أوجد الحل العام للنظام

$$\begin{aligned} -x_2 + 2x_3 + 4x_4 &= 0 \\ -x_3 + 3x_4 &= 0 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 + 7x_4 &= 0 \\ 6x_1 + 2x_2 + 10x_3 + 28x_4 &= 0 \end{aligned}$$

الحل من الواضح في هذا النظام المتجانس أنه يوجد عدد 4 مجهول، وأربع معادلات. أي أن عدد المعادلات يساوي عدد المجاهيـــل ($m = n$).

نضع ـــ أولاً ـــ النظام على شكل المعادلة المـــصفوفية $AX = O$، إذن

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 3 & 7 \\ 6 & 2 & 10 & 28 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

وبما أن

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 3 & 7 \\ 6 & 2 & 10 & 28 \end{bmatrix} \Rightarrow A_R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 13 \\ 0 & 1 & 0 & -10 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

إذن فإن عدد الصفوف غير الصفرية في المصفوفة المختزلة A_R هو العدد 3، أي أن $rank\,(A) = 3$. وبالتالي فــإن $rank\,(A) < 4$، وذلك لأن $n = 4$. أيضاً يمكن التأكد من أن $|A| = 0$، وحــسب النظرية (5.3) فإنه يوجد عدد لانهائي من الحلول، يمكن الحـــصول عليهم بحل النظام $A_R X = O$، أو النظام

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 13 \\ 0 & 1 & 0 & -10 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

ومن الجزء الثاني من النظرية (5.1) فإن عدد الكميـــات القياســية الاختياريـــة في فـــضاء الحلـــول هـــو $r = 1$ حيـــث $r = m - rank\,(A) = 4 - 3 = 1$. من الخطوة الثانية من طريقـــة جاوس ـــ جوردان نجد أن x_1, x_2, x_3 هي مجاهيل تابعـــة، وأن x_4 هو مجهول مستقل. إذن نحصل من الخطوة رقم 3 علـــى المجاهيـــل x_1, x_2, x_3 بدلالة المجهول x_4. وهكذا نجد أن

$$\left.\begin{aligned} x_1 + 13x_4 &= 0 \\ x_2 + 10x_4 &= 0 \\ x_3 - 3x_4 &= 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} x_1 &= -13x_4 \\ x_2 &= -10x_4 \\ x_3 &= 3x_4 \end{aligned}$$

وبما أنه يمكن أن نعتبر $x_4 = \alpha$، حيث α كمية قياسية اختياريـــة إذن

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = x_4 \begin{bmatrix} -13 \\ 10 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} = \alpha \begin{bmatrix} -13 \\ 10 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

من الواضح أنه يوجد كمية قياسية اختيارية واحدة هي α. وعلى هذا فإن الحل ليس حلاً وحيداً، بل هو فضاء لانهائي من الحلول. إذ أنه كلما تغيرت قيمة α لتأخذ قيماً اختيارية، يتغير الحل لنحصل في النهاية على عدد لانهائي من الحلول مكوناً بذلك فضاءً من الحلول. بُعد *(Dimension)* هذا النظام يساوي عدد الثوابت الاختيارية. في هذا المثـــــــال مثلاً، نجد أن بُعد فضاء الحلول هو العدد 1.

مثال 5.5 أوجد الحل العام للنظام

$$\begin{aligned} 3x_1 - 11x_2 + 15x_3 &= 0 \\ 4x_1 + x_2 - 10x_3 &= 0 \\ 4x_1 + 9x_2 - 6x_3 &= 0 \end{aligned}$$

الحل من الواضح في هذا النظام المتجانس أنه يوجد عدد 3 مجهول، وعدد ثلاث معادلات. أي أن عدد المعادلات يـــساوي عـــدد المجاهيـــل $(m = n)$.

نضع ـــ أولاً ـــ النظام على شكل المعادلة المـــصفوفية $AX = O$ ، فنجد مصفوفة المعاملات A ، والمصفوفة المختزلة لها A_R ـــ علـــى الترتيب ـــ في الأشكال

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -11 & 15 \\ 4 & 1 & -10 \\ 4 & 9 & -6 \end{bmatrix} \rightarrow A_R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

وبما أن رتبة المصفوفة هي $n = 3$ ، ومرتبتها هـــي $rank\,(A) = 3$ إذن فإن $rank\,(A) = n$. وبالتالي فحسب النظريـــة (5.2) فـــإن حلول النظام المعطى هي الحلول الصفرية فقط. نلاحظ ـــ أيضاً ـــ من الخطوة الثانية من طريقة جاوس ـــ جـــوردان أن x_1, x_2, x_3 هي مجاهيل تابعة، ولا توجد أية مجاهيل مستقلة على الإطلاق.

وحسب الجزء الأول من النظرية (5.1) نجد أن حل النظام المعطـــى يكافيء حل النظام

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

إذن

$$x_1 = 0\ ,\ x_2 = 0\ ,\ x_3 = 0$$

✍.

5.4 الـــــــــنظم غـــــير المتـــــجانسة Non-Homogeneous Systems

يُعرَّف نظام المعادلات الجبرية الخطية غيرالمتجانس على أنه عدد من المعادلات الجبرية الخطية في عدد من المجاهيل بحيث أن حداً واحـــداً ـــــ على الأقل ـــــ من الحدود الثابتة (الحدود المطلقة) في جميـــع المعادلات يكون غير صفرى. بكلمات أخرى إذا كان هناك عنصر واحد ـــ على الأقل ـــ من عناصر المصفوفة **B** في النظـــام غـــير المتجانس (5.2) غير مساوٍ للصفر فإن النظام يكون غير متجـــانس.

لنفرض النظام غير المتجانس

$$\mathbf{AX} = \mathbf{B} \tag{5.5}$$

حيث يوجد ـــ على الأقل ـــ عنصر واحد غير صفري في عناصر المصفوفة **B** في النظام (8.5). الحل المطلوب لهذا النظام (5.5) هـــو قيم هذه المجاهيل $x_1, x_2, \ldots, x_m$، والتي تحقق كـــل معـــادلات النظام. ومن المعروف أنه إذا وُجد حل لهذا النظام فإنه يسمى نظاماً متوافقاً *(Consistent)*، وإذا لم يوجد حل فإنه يسمى نظامـــاً غـــير متوافق *(Inconsistent)*.

والنظام المتوافق ربما يوجد له حل وحيد أو ربما يوجـــد لـــه عـــدد لانهائي من الحلول، وللحصول على حل النظم الخطية غير المتجانسة

توجد أكثر من طريقة من الطرق المسماة "طرق مباشرة". ويعتمـــد نوع الطريقة المستخدمة في الحل على نوعية النظم غير المتجانسة من حيث كونها نظماً مربعة (عدد المعادلات يساوي عدد المجاهيـــل) أم غير مربعة.

فإذا كانت مصفوفة المعاملات مربعة، وغير شاذة ($|A| \neq 0$) فيمكن عندئذٍ حل النظام بثلاث طرق. الطريقة الأولى هي "طريقة كرامر" ***(Cramer's Rule)***، والـــتي تُـــستخدم فيهـــا المحـــددات ***(Determinats)***، الطريقة الثانية باستخدام المـــصفوفة العكـــسية ***(Inverse Matrix)***، أما الطريقة الثالثة فهي باســـتخدام طريقـــة جاوس ـــــ جوردان والتي تعتمد على ما يسمى "المصفوفة الموسعة" ***(Augmented Matrix)***.

أما إذا كانت مصفوفة المعاملات غير مربعة فلا يوجد لنا من طـــرق الحل إلا طريقة المصفوفة الموسعة، والتي تعتمد على طريقة جاوس ـــ جوردان، وسوف نتعرض ـــ الآن ـــ للحالتين: الحالة الأولى عندما تكون مصفوفة المعاملات غير مربعة (عدد المعادلات n أقل أو أكثر من عدد المجاهيل m)، والحالة الثانية عندما يتساوى عدد المعادلات مع عدد المجاهيل، أي عندما $m = n$ (مصفوفة المعاملات مربعة).

الحالة الأولى

حلول النظم غير المتجانسة وغير المربعة

قبل البدء في تطبيق طرق الحلول ـــ يجب التعرف على نظرية هامة تبين الشروط الواجب توافرها لكي يوجد للنظام غير المتجانس حل، وما إذا كان هذا الحل وحيداً أم أنه عدد لانهائي من الحلول.

حيث تثبت هذه النظرية أنه في حالة الأنظمة غير المتجانسة، والـــتي تكون فيها مصفوفة المعاملات غير مربعة فإن الحل العـــام للنظـــام يتكون من حلين، الأول هو الحل العام لنفس النظام بعد أن نجعلـــه متجانساً وذلك بمساواة كل عناصر المصفوفة B بالصفر، والحـــل الثاني هو أي حل خاص *(Particular Solution)* للنظـــام غـــير المتجانس يمكن أن يحقق كل معـــادلات النظـــام غـــير المتجـــانس $AX = B$.

نظرية 5.4 عن حل النظم غير المتجانسة

(1) إذا كانت A هي مصفوفة غير مربعـــة مـــن الرتبـــة $n \times m$، وكانت $[A|B]$ هي المصفوفة الموسعة، فإنه يوجد لنظام المعادلات غير المتجانس $AX = B$ حل إذا وفقط إذا كان

$$rank(A) = rank[A|B]$$

(2) الحل العام للنظام غير المتجانس $AX = B$ هو $G + P$. حيث المصفوفة P هي مصفوفة أي حل خاص للنظـــام غـــير المتجـــانس $AX = B$. أما المصفوفة G فهي مصفوفة الحـــل العـــام للنظـــام المتجانس $AX = O$.

✪✪✪

مثال 5.6 أوجد الحل العام للنظام غير المتجانس

$$\begin{aligned} -x_1 + x_2 + 3x_3 &= -2 \\ x_2 + 2x_3 &= 4 \end{aligned}$$

الحل من الواضح أنه يوجد في هذا النظام غيرالمتجانس عدد 3 مجهـــول $m = 3$ وعدد 2 معادلة $n = 2$، أي أن عدد المعادلات أقـــل مـــن عدد المجاهيل، وبالتالي فمن المحتمل وجود عدد لانهائي من الحلول. نضع أولاً: النظام على شكل المعادلة المصفوفية $AX = B$ فنحصل على

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 4 \end{bmatrix}$$

يمكن تكوين المصفوفة الموسعة $\left[A|B\right]$، والحصول على المـــصفوفة المختزلة لها $\left[A|B\right]_R$ حيث نجد أن

$$[A|B]=\left[\begin{array}{ccc|c}-1 & 1 & 3 & -2\\ 0 & 1 & 2 & 4\end{array}\right]\Rightarrow [A|B]_R=\left[\begin{array}{ccc|c}1 & 0 & -1 & 6\\ 0 & 1 & 2 & 4\end{array}\right]$$

وبما أن $rank\,(A)=rank\,[A|B]=2$ إذن فللنظام يوجد عدد لانهائي من الحلول نحصل عليها بحل النظام

$$\begin{bmatrix}1 & 0 & -1\\ 0 & 1 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}6\\ 4\end{bmatrix}$$

وهكذا نجد من مفاهيم طريقة جـــاوس ـــ جـــوردان أن المـــتغيرين x_1, x_2 هما متغيران تابعان، بينما x_3 هو متغير مستقل، وبالتـــالي نعبر عن المتغيرات التابعة بدلالة المتغير المستقل لنحصل على

$$\begin{aligned}x_1-x_3&=6\\ x_2+2x_3&=4\end{aligned}\quad\Rightarrow\quad\begin{aligned}x_1&=6+x_3\\ x_2&=4-2x_3\end{aligned}$$

وبفرض أن $x_3=\alpha$، حيث α كمية قياسية إختيارية نحصل علـــى الحل العام للنظام المعطى في الشكل

$$\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}6+x_3\\ 4-2x_3\\ x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}6\\ 4\\ 0\end{bmatrix}+\alpha\begin{bmatrix}1\\ -2\\ 1\end{bmatrix}$$

حيث تعبر المصفوفة $[6 \quad 4 \quad 0]^t$ عن مصفوفة الحل الخاص للنظام غير المتجانس المعطى، أما المصفوفة $\alpha[1 \quad -2 \quad 1]^t$ فهي تعبر عن مصفوفة الحل العام للنظام المتجانس

$$\begin{aligned}-x_1+x_2+3x_3&=0\\ x_2+2x_3&=0\end{aligned}$$

يجـــب ملاحظـــة أن الرمـــز t في المـــصفوفات يرمـــز إلى مـــدور المصفوفة (*Transpose Matrix*)، وهي المصفوفة التي يمكن الحصول عليها بتحويل صفوفها إلى أعمدة أوالعكس.

مثال 5.7 أوجد الحل العام للنظام

$$\begin{aligned} x_1 - x_3 + 2x_4 + x_5 + 6x_6 &= -3 \\ x_2 + x_3 + 3x_4 + 2x_5 + 4x_6 &= 1 \\ x_1 - 4x_2 + 3x_3 + x_4 + 2x_6 &= 0 \end{aligned}$$

الحل من الواضح أنه يوجد في هذا النظام غيرالمتجانس عدد 6 مجهـــول $m = 6$ وعدد 3 معادلة $n = 3$، أي أن عدد المعادلات أقـــل مـــن عدد المجاهيل، وبالتالي فمن المحتمل وجود عدد لانهائي من الحلول، أو عدم وجود حل. نضع أولاً: النظام على شكل المعادلة المصفوفية $\mathbf{AX = B}$ فنحصل على

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 2 & 4 \\ 1 & -4 & 3 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

حيث

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}1 & 0 & -1 & 2 & 1 & 6\\ 0 & 1 & 1 & 3 & 2 & 4\\ 1 & -4 & 3 & 1 & 0 & 2\end{bmatrix},\mathbf{X}=\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\\ x_4\\ x_5\\ x_6\end{bmatrix},\mathbf{B}=\begin{bmatrix}-3\\ 1\\ 0\end{bmatrix}$$

فيكون المطلوب هو الحصول على قيم المجاهيل $\{x_i\}_{i=1}^{6}$، أو بمعنى آخر الحصول على المصفوفه $\mathbf{X}$. نكون ــ أولاً ــ المصفوفة الموسعة

$$\left[\mathbf{A}|\mathbf{B}\right]=\left[\begin{array}{cccccc|c}1 & 0 & -1 & 2 & 1 & 6 & -3\\ 0 & 1 & 1 & 3 & 2 & 4 & 1\\ 1 & -4 & 3 & 1 & 0 & 2 & 0\end{array}\right]$$

فنجد أن

$$\left[\mathbf{A}|\mathbf{B}\right]_{\mathbf{R}}=\left[\begin{array}{cccccc|c}1 & 0 & 0 & \frac{27}{8} & \frac{15}{8} & \frac{60}{8} & -\frac{17}{8}\\ 0 & 1 & 0 & \frac{13}{8} & \frac{9}{8} & \frac{20}{8} & \frac{1}{8}\\ 0 & 0 & 1 & \frac{11}{8} & \frac{7}{8} & \frac{12}{8} & \frac{7}{8}\end{array}\right]$$

وبما أن

$$rank\left(\mathbf{A}\right)=rank\left[\mathbf{A}|\mathbf{B}\right]=3$$

إذن يوجد عدد لانهائي من الحلول للنظام المعطى نحصل عليها مـــن حل النظام

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{27}{8} & \frac{15}{8} & \frac{60}{8} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{13}{8} & \frac{9}{8} & \frac{20}{8} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{11}{8} & \frac{7}{8} & \frac{12}{8} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{17}{8} \\ \frac{1}{8} \\ \frac{7}{8} \end{bmatrix}$$

حيث المتغيرات x_1, x_2, x_3 هي متغيرات تابعة، بينما x_4, x_5, x_6 هي متغيرات مستقلة، بالتالي فإن النظام السابق يتحول مرة أخـــرى إلى المعادلات

$$x_1 + \frac{27}{8}x_4 + \frac{15}{8}x_5 + \frac{60}{8}x_6 = -\frac{17}{8};$$
$$x_2 + \frac{13}{8}x_4 + \frac{9}{8}x_5 + \frac{20}{8}x_6 = \frac{1}{8};$$
$$x_3 + \frac{11}{8}x_4 + \frac{7}{8}x_5 + \frac{12}{8}x_6 = \frac{7}{8}$$

الآن، بـــالتعبير عـــن المجاهيـــل (x_1, x_2, x_3) بدلالـــة المجاهيـــل (x_4, x_5, x_6) نحصل على

$$x_1 = -\frac{27}{8}x_4 - \frac{15}{8}x_5 - \frac{60}{8}x_6 - \frac{17}{8}$$
$$x_2 = -\frac{13}{8}x_4 - \frac{9}{8}x_5 - \frac{20}{8}x_6 + \frac{1}{8};$$
$$x_3 = -\frac{11}{8}x_4 - \frac{7}{8}x_5 - \frac{12}{8}x_6 + \frac{7}{8}$$

وبما أنه يمكن اعتبار أن

$$x_4 = \alpha;\ \ x_5 = \beta;\ \ x_6 = \delta$$

حيث α, β, δ كميات أختيارية إذن فإن الحل العام للنظام المعطى وهو عبارة عن عدد لانهائي من الحلول يأخذ الشكل

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{bmatrix} = \alpha \begin{bmatrix} -27/8 \\ -13/8 \\ -11/8 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} -15/8 \\ -9/8 \\ -7/8 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \delta \begin{bmatrix} -60/8 \\ -20/8 \\ -12/8 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -17/8 \\ 1/8 \\ 7/8 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

بالتأكيد فإن

$$\begin{bmatrix} -17/8 & 1/8 & 7/8 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^t$$

هو الحل الخاص للنظام المعطى. أيضاً فإن الحل العام للنظام المتجانس المقابل لغير المتجانس هو

$$\alpha \begin{bmatrix} -27/8 \\ -13/8 \\ -11/8 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} -15/8 \\ -9/8 \\ -7/8 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \gamma \begin{bmatrix} -60/8 \\ -20/8 \\ -12/8 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

✍.

مثال 5.8 أوجد الحل العام للنظام

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 + 2x_3 &= -1 \\ x_3 &= 0 \\ 3x_1 - 3x_2 + 7x_3 &= 1 \\ 10x_1 - 10x_2 + 24x_3 &= -2 \end{aligned}$$

الحل من الواضح أنه يوجد في هذا النظام غيرالمتجانس عدد 3 مجهـــول $m = 3$ وعدد 4 معادلة $n = 4$، أي أن عدد المعادلات أكبر مــن عدد المجاهيل، وبالتالي فمن المحتمل وجود عدد لانهائي من الحلول أو عدم وجود حل. نضع أولاً: النظام على شكل المعادلة المـــصفوفية $\mathbf{AX = B}$ فنحصل على

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 3 & -3 & 7 \\ 10 & -10 & 24 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

حيث

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 3 & -3 & 7 \\ 10 & -10 & 24 \end{bmatrix}; \ \mathbf{X} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}; \ \mathbf{B} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

بما أن

$$[A|B]=\left[\begin{array}{ccc|c}1&-1&2&-1\\0&0&1&0\\3&-3&7&1\\10&-10&24&2\end{array}\right]\Rightarrow[A|B]_R=\left[\begin{array}{ccc|c}1&-1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{array}\right]$$

إذن نجـــد أن $rank\,(A)=2\neq rank\,[A|B]=3$. وبالتـــالي لا يوجد حل للنظام المعطى، أي أن النظام غير متوافق.

الحالة الثانية

حلول النظم غير المتجانسة المربعة

لإيجاد الحل العام لنظم المعادلات الخطية غير المتجانسة في الحالة التي يكون فيها عدد المعادلات مساوياً عدد المجاهيـــل، أي في حالـــة أن $m=n$، حيث n هو عدد المعادلات، بينما m هو عدد المجاهيـــل يمكن أن نستخدم ثلاث طرق: الطريقة الأولى هي طريقة المصفوفة الموسعة كما في حالة النظم غير المربعة. الطريقة الثانية هي طريقـــة كرامر (باستخدام المحددات)، والطريقة الثالثة باســـتخدام مفهـــوم المصفوفة العكسية. النظرية التالية تبين إمكانية وجود الحـــل لـــنظم المعادلات الخطية غير المتجانسة في الحالة التي يكـــون فيهـــا عـــدد المعادلات يساوي عدد المجاهيل، كما تبين الشروط الواجب توافرها لكي يوجد حل، ومتى يكون هذا الحل وحيداً.

نظرية 5.5 **عن حل النظم غير المتجانسة المربعة**

إذا كانت A مصفوفة مربعة من الرتبة $n \times n$، فإنه يوجد للنظـــام غير المتجانس $AX = B$ حل إذا كان

$$rank\,(A) = rank\,[A|B]$$

ويكون هذا الحل وحيداً إذا وفقط إذا كان: $rank\,(A) = n$، أو إذا وفقط إذا كان $A_R = I_n$، أو بشرط أن تكون المـــصفوفة A مصفوفة غير شاذة ($|A| \neq 0$).

✪✪✪

النظرية بكلمات أخرى

لنفرض أن A هي مصفوفة مربعة من الرتبـــة $n \times n$. وإذا كـــان $rank\,(A) \neq n$ أو $A_R \neq I_n$ أو $|A| = 0$؛ فـــإن للنظـــام غـــير المتجانس $AX = B$ لايوجد أي حل على الإطلاق.

5.5 طريقة كرامر - Cramer's Method

تُستخدم طريقة كرامر لحل نظم المعادلات الخطيـــة المربعـــة غـــير المتجانسة فقط إذا توافرت الشروط الثلاثة التالية:

(1) النظام خطي وغير متجانس. (2) عدد المعادلات يساوي عـــدد المجاهيل. (3) مصفوفة المعاملات غير شاذة، أي أن $|A| \neq 0$.

لنعتبر النظام غير المتجانس $AX = B$ ، والذي فيــه مــصفوفة المعاملات A مربعة، وغير شاذة أي أن $|A| \neq 0$، حيث

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

نحسب عدد $n+1$ من المحددات $\Delta, \Delta(x_1), \Delta(x_2), \ldots, \Delta(x_n)$ حيث Δ هــو محــدد مــصفوفة المعــاملات A بينمــا المحــدد $\Delta(x_j);\ j = \overline{1,n}$ هو المحدد الناتج من تبــديل العمــود رقــم j (العمود الذي يحتوي على معــاملات x_j) في محــدد المعــاملات، $\Delta = |A|$ ، بعمود الثوابت B ، أي أن

$$\Delta(x_j) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & b_1 & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & b_2 & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & b_n & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

هذا، وتقول طريقة كرامر إن حل النظام غير المتجــانس $AX = B$ هو المصفوفة

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \frac{1}{|A|} \begin{bmatrix} \Delta(x_1) \\ \Delta(x_2) \\ \vdots \\ \Delta(x_n) \end{bmatrix}$$

مثال 5.9 أوجد الحل العام للنظام

$$-x_2 + 2x_3 = 4$$
$$3x_1 - 3x_2 = 3$$
$$-x_1 + x_3 = 1$$

الحل من الواضح أن النظام غير متجانس ومربع يحتوي علـــى عـــدد 3 مجهول $m = 3$ وعدد 3 معادلة $n = 3$، أي أن عـــدد المعـــادلات تساوي عدد المجاهيل، وبالتالي فمن المحتمل وجود حل وحيد أو عدم وجود حل على الإطلاق. نضع أولاً: النظام على شـــكل المعادلـــة المصفوفية $AX = B$ فنحصل على

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 3 & -3 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

حيث

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 3 & -3 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

باســتخدام طريقـــة كرامـــر نحـــسب الأربعـــة محـــددات $\Delta, \Delta(x_1), \Delta(x_2), \Delta(x_3)$ على النحو التالي

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 3 & -3 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -3, \quad \Delta(x_1) = \begin{vmatrix} 4 & -1 & 2 \\ 3 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -3$$

$$\Delta(x_2) = \begin{vmatrix} 0 & 4 & 2 \\ 3 & 3 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0, \quad \Delta(x_3) = \begin{vmatrix} 0 & -1 & 4 \\ 3 & -3 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -6$$

إذن الحل المطلوب هو

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{|A|} \begin{bmatrix} \Delta(x_1) \\ \Delta(x_2) \\ \Delta(x_3) \end{bmatrix} = \frac{1}{-3} \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ -6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

أي أن $x_1 = 1, x_2 = 0 . x_3 = 2$

<u>باستخدام طريقة جاوس - جوردان</u>

نجد أن المصفوفة الموسعة ومصفوفتها المختزلة للنظام المغطى هما على الترتيب

$$[A|B] = \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & -1 & 2 & 4 \\ 3 & -3 & 0 & 3 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right], [A|B]_R = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right]$$

ومن هنا نجد أن

$$x_1 = 1, x_2 = 0 . x_3 = 2$$

5.6 طريقة المصفوفة العــــكسية
Inverse Matrix Method

وهذه الطريقة يمكن استخدامها إذا توافرت الشروط الثلاثة التالية: (1) النظام خطي وغير متجانس. (2) عدد المعادلات يساوي عــدد المجاهيل (النظام مربع). (3) المصفوفة العكسية لمصفوفة المعاملات لها وجود، وهذا لن يحدث إلا إذا كانت مصفوفة المعاملات غير شاذة بمعنى أن $|A| \neq 0$.

لنعتبر النظام غير المتجــانس $AX = B$ ، والــذي فيــه مــصفوفة المعاملات A مربعة وغير شاذة أي أن $|A| \neq 0$ حيث

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & a_{n4} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

لنفرض ـــ أيضاً ـــ أن المصفوفة A^{-1} هي المــصفوفة العكــسية لمصفوفة المعاملات A .

الآن، يتم ضرب النظام $AX = B$ من جهة اليــسار في المــصفوفة العكسية A^{-1} ، فنحصل على $A^{-1}AX = A^{-1}B$.

وبما أن $A^{-1}A = I_n$ ، حيث I_n هي مصفوفة الوحدة من الرتبــة $n \times n$ ، إذن فــإن $I_n X = A^{-1}B$ ، أو $X = A^{-1}B$ ، وحيــث أن

معكوس المصفوفة إن وجد فهو وحيد، إذن فإنـــه يوجـــد للنظـــام $AX = B$ حل وحيد هو $X = A^{-1}B$.

نظرية - 5.6

إذا كان محدد المصفوفة A في النظام $AX = B$ غـــير صفري فإن للنظام $AX = B$ حل وحيد هو

$$X = A^{-1}B$$

✪✪✪



بضرب المعادلة المصفوفية $AX = B$ من جهة اليـــسار في A^{-1} نحصل على $A^{-1}AX = A^{-1}B$.

وبما أن $A^{-1}A=I$ ، إذن فإن $I\,X=A^{-1}B$ ويكون هذا الحل الوحيد هو $X=A^{-1}B$.

✍.

مثال 5.10 أوجد حل النظام المعطى في المثال السابق

الحل لإستخدام مفهوم المصفوفة العكسية في الحصول على الحل نـــضع أولاً النظام على شكل المعادلة المصفوفية $AX = B$ فنحصل على

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 3 & -3 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

حيث



$$A=\begin{bmatrix}0 & -1 & 2\\ 3 & -3 & 0\\ -1 & 0 & 1\end{bmatrix}, X=\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix}4\\ 3\\ 1\end{bmatrix}$$

بما أن $|A|=-3$، إذن نوجد الأن المصفوفة العكسية A^{-1} فنجـــد أنها

$$A^{-1}=\frac{1}{-3}\begin{pmatrix}-3 & 1 & 6\\ -3 & 2 & 6\\ -3 & 1 & 3\end{pmatrix}$$

إذن حل النظام هو

$$X=A^{-1}B=\frac{1}{-3}\begin{pmatrix}-3 & 1 & 6\\ -3 & 2 & 6\\ -3 & 1 & 3\end{pmatrix}\begin{bmatrix}4\\ 3\\ 1\end{bmatrix}=\frac{1}{-3}\begin{bmatrix}-3\\ 0\\ -6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\ 0\\ 2\end{bmatrix}$$

ومن هنا نجد أن

$$x_1=1, x_2=0. x_3=2$$

✍.

مثال 5.11 أوجد حل النظام

$$\begin{aligned} x_1 + \quad\quad + 2x_3 &= 6\\ -3x_1 + 4x_2 + 6x_3 &= 30\\ -\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 &= 8 \end{aligned}$$

الحل أولاً نضع هذا النظام في الصورة المصفوفية $AX=B$، أو

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -3 & 4 & 6 \\ -1 & -2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 30 \\ 8 \end{bmatrix}$$

حيث

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -3 & 4 & 6 \\ -1 & -2 & 3 \end{bmatrix}, \mathbf{X} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}, \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 6 \\ 30 \\ 8 \end{bmatrix}$$

بما أن $|\mathbf{A}| = 44 \neq 0$، إذن حل هذا النظام هو $\mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}$. لإيجاد المصفوفة العكسية $\mathbf{A}^{-1}$ نوجد مصفوفة العوامل و المصفوفة المرتبطة فنجدهما في الأشكال

$$cofactor\ (\mathbf{A}) = \begin{bmatrix} 24 & 3 & 10 \\ -4 & 5 & 2 \\ -8 & -12 & 4 \end{bmatrix}, \mathbf{Adj}(\mathbf{A}) = \begin{bmatrix} 24 & -4 & -8 \\ 3 & 5 & -12 \\ 10 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

وبالتالي فإن

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{|\mathbf{A}|} \times Adj\ \ (\mathbf{A}) = \frac{1}{44} \times \begin{bmatrix} 24 & -4 & -8 \\ 3 & 5 & -12 \\ 10 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

و يكون الحل هو

$$\mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B} = \frac{1}{44} \times \begin{bmatrix} 24 & -4 & -8 \\ 3 & 5 & -12 \\ 10 & 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 \\ 30 \\ 8 \end{bmatrix}$$

$$=\frac{1}{44}\begin{bmatrix}(24\times 6)+(-4\times 30)+(-8\times 8)\\(3\times 6)+(5\times 30)+(-12\times 8)\\(10\times 6)+(2\times 30)+(4\times 8)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-\frac{10}{11}\\\frac{18}{11}\\\frac{38}{11}\end{bmatrix}$$

وبالتالي فإن $x_1=-\frac{10}{11}\ ;\ x_2=\frac{18}{11}\ ;\ x_3=\frac{38}{11}$

مثال 5.12 أوجد حل النظام بطرق مختلفة

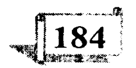
$$\begin{aligned}4x_1-3x_2+x_3&=-1\\-3x_1+x_2-5x_3&=\ \ 0\\-5x_1-14x_3&=-10\end{aligned}$$

الحل لإستخدام مفهوم المصفوفة العكسية في الحصول على الحل نـــضع أولاً النظام على شكل المعادلة المصفوفية $AX=B$ فنحصل على

$$\begin{bmatrix}4&-3&1\\-3&1&-5\\-5&0&-14\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1\\0\\-10\end{bmatrix}$$

حيث

$$A=\begin{bmatrix}4&-3&1\\-3&1&-5\\-5&0&-14\end{bmatrix},X=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix},B=\begin{bmatrix}-1\\0\\-10\end{bmatrix}$$



بما أن $|A| = 0$، إذن لا توجد المصفوفة العكسية A^{-1} وبالتـــالي لا يمكن إيجاد حل للنظام بطريقة المصفوفة العكسية.

الحل بطريقة المصفوفة الموسعة

نكون المصفوفة الموسعة $[A|B]$، ثم نختزلها فنحصل على المصفوفة المختزلة $[A|B]_R$ فنجد أن

$$[A|B] = \left[\begin{array}{ccc|c} 4 & -3 & 1 & -1 \\ -3 & 1 & -5 & 0 \\ -5 & 0 & -14 & -10 \end{array}\right], \quad [A|B]_R = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \frac{14}{5} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{17}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

وبما أن

$$rank(A) = 2 \neq rank[A|B] = 3$$

إذن لايوجد للنظام المعطى حل.

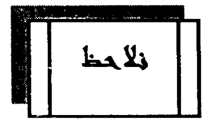
الحل بطريقة كرامر

بما أن

$$|A| = \begin{vmatrix} 4 & -3 & 1 \\ -3 & 1 & -5 \\ -5 & 0 & -14 \end{vmatrix} = 0$$

إذن المـــــصفوفة A مـــــصفوفة شــــاذة ــ لاحـــــظ أيــــضاً أن $rank(A) = 2 < n = 3$ وبالتالي لايوجد للنظام المعطى أي حلول.

✍.



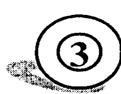
أن هناك أربعة دلائل على عدم وجود حل لهذا النظام غير المتجانس، وبالتالي لا يمكن استخدام أي من الطرق الثلاث السابقة، وهذه الدلائل الأربعة هي



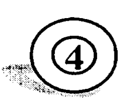
$$rank\,(\mathrm{A}) \neq rank\left[\mathrm{A}|\mathrm{B}\right]$$



$$rank\,(\mathrm{A}) = 2 \neq n = 3$$



$$\mathrm{A_R} \neq \mathrm{I}_n$$



$$|\mathrm{A}| = 0$$

▲▲▲

مثال 5.13 أوجد حل النظام بطرق مختلفة

$$\begin{aligned} 4x_1 - x_2 + 4x_3 &= 1 \\ x_1 + x_2 - 5x_3 &= 0 \\ -2x_1 + x_2 + 7x_3 &= 4 \end{aligned}$$

الحل نضع أولاً النظام على شكل المعادلة المصفوفية $\mathrm{AX} = \mathrm{B}$

$$\begin{bmatrix} 4 & -1 & 4 \\ 1 & 1 & -5 \\ -2 & 1 & 7 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix}$$

حيث

$$A=\begin{bmatrix}4 & -1 & 4\\ 1 & 1 & -5\\ -2 & 1 & 7\end{bmatrix}, X=\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix}1\\ 0\\ 4\end{bmatrix}$$

الحل بطريقة المصفوفة الموسعة

لدينا

$$\left[A|B\right]=\left[\begin{array}{ccc|c}4 & -1 & 4 & 1\\ 1 & 1 & -5 & 0\\ -2 & 1 & 7 & 4\end{array}\right], \left[A|B\right]_R=\left[\begin{array}{ccc|c}1 & 0 & 0 & \frac{16}{57}\\ 0 & 1 & 0 & \frac{99}{57}\\ 0 & 0 & 1 & \frac{23}{57}\end{array}\right]$$

وبما أن $\quad rank\,(A)=rank\left[A|B\right]=3=n$

إذن يوجد للنظام حل وحيد، يكافيء حل النظام

$$\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{16}{57}\\ \frac{99}{57}\\ \frac{23}{57}\end{bmatrix}$$

وبالتالي فإن الحل هو

$$x_1=\frac{16}{57},\ \ x_2=\frac{99}{57},\ \ x_3=\frac{23}{57}$$

الحل بطريقة كرامر

لدينا

$$|A|=\begin{vmatrix}4 & -1 & 4\\ 1 & 1 & -5\\ -2 & 1 & 7\end{vmatrix}=57, \Delta(x_1)=\begin{vmatrix}-1 & 1 & 4\\ 0 & 1 & -5\\ 4 & 1 & 7\end{vmatrix}=16$$

$$\Delta(x_2)=\begin{vmatrix}4 & 1 & 4\\ 1 & 0 & -5\\ -2 & 4 & 7\end{vmatrix}=99, \Delta(x_3)=\begin{vmatrix}4 & -1 & 1\\ 1 & 1 & 0\\ -2 & 1 & 4\end{vmatrix}=23$$

وبالتالي فإن الحل الوحيد هو

$$X=\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}=\frac{1}{|A|}\begin{bmatrix}\Delta(x_1)\\ \Delta(x_2)\\ \Delta(x_3)\end{bmatrix}=\frac{1}{57}\begin{bmatrix}16\\ 99\\ 23\end{bmatrix}$$

أو

$$x_1=\frac{16}{57},\quad x_2=\frac{99}{57},\quad x_3=\frac{23}{57}$$

الحل بطريقة المصفوفة العكسية

بما أن $|A|=57\neq 0$ إذن، يمكن إيجاد المصفوفة العكـــسية A^{-1}، وبالتالي يمكن الحصول على الحل الوحيـــد $X=A^{-1}B$. بـــدون الدخول في التفاصيل يمكن أن نجد المصفوفة العكسية في الشكل

$$A^{-1}=\begin{bmatrix}\frac{12}{57} & \frac{11}{57} & \frac{1}{57}\\ \frac{3}{57} & \frac{36}{57} & \frac{24}{57}\\ \frac{3}{57} & -\frac{2}{57} & \frac{5}{57}\end{bmatrix}$$

إذن الحل الوحيد هو



$$\mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \frac{12}{57} & \frac{11}{57} & \frac{1}{57} \\ \frac{3}{57} & \frac{36}{57} & \frac{24}{57} \\ \frac{3}{57} & -\frac{2}{57} & \frac{5}{57} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{16}{57} \\ \frac{99}{57} \\ \frac{23}{57} \end{bmatrix}$$

أو

$$x_1 = \frac{16}{57}, \quad x_2 = \frac{99}{57}, \quad x_3 = \frac{23}{57}$$

في الباب القادم نقدم المدخل الثاني لحل نظم المعادلات وهى الطرق التي تسمى بالطرق التكرارية، والتي تعتمد ــ أيضاً ــ على نظرية المصفوفات، وهي تعطي حلولاً تقاربية كما سنرى.

5.7 مسائل

أوجد الحل العام في حالة وجوده، وذلك لأنظمة المعادلات الجبريـــة الخطية الآتية مستخدماً ثلاث طرق إن أمكن

1. $$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - x_3 &= 1 \\ -x_1 + x_2 + x_3 &= 3 \\ 2x_1 - 3x_2 - x_3 &= 2 \end{aligned}$$

2. $$\begin{aligned} x_1 - 3x_2 + x_3 &= 1 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 &= -1 \\ x_1 + x_2 + x_3 &= 2 \end{aligned}$$

8. $$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 + 2x_3 &= 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 &= 0 \\ x_1 + x_2 + 4x_3 &= 0 \end{aligned}$$

9. $$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 &= 0 \\ x_2 - x_3 + x_4 &= 0 \end{aligned}$$

3. $$2x_1 - 3x_2 = 6$$
$$4x_1 - 6x_2 = 18$$

4. $$2x_1 - x_2 = -1$$
$$3x_2 = 4$$

5. $$2x_1 + x_2 + x_3 = -1$$
$$x_1 + x_2 - 2x_3 = 1$$
$$x_1 + x_2 - x_3 = 2$$

6. $$x_1 + \quad + 2x_3 = 6$$
$$-3x_1 + 4x_2 + 6x_3 = 30$$
$$-x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 8$$

7. $$2x_1 + x_2 + 2x_3 = 0$$
$$x_1 - x_2 = 0$$
$$x_1 + x_2 = 0$$

10. $$2x_1 + x_2 + 2x_3 = 0$$
$$x_1 - x_2 = 0$$

11. $$x_1 - x_3 + 2x_4 + x_5 + 6x_6 = -3$$
$$x_2 + x_3 + 3x_4 + 2x_5 + 4x_6 = 1$$
$$x_1 - 4x_2 + 3x_3 + x_4 + 2x_6 = 0$$

12. $$x_1 + x_2 + 2x_3 = 0$$
$$x_1 + x_2 - 2x_3 = 1$$

13. $$x_1 - 2x_3 = 0$$
$$3x_1 + 4x_2 + 6x_3 = 16$$
$$x_1 - 2x_2 + 3x_3 = -8$$

14. $$x_1 - x_3 + 2x_4 + x_5 + 6x_6 = 2$$

****

6 الطرق التكرارية
Iterative Methods

في الباب الرابع أمكن الحصول على حلول لنظم المعادلات الجبرية الخطية، وذلك في حالات مختلفة (نظم متجانسة، نظم غير متجانسة، نظم مربعة، أو نظم غير مربعة)، وذلك باستخدام الطرق المباشرة *(Direct Methods)*، والتي كانت تعطي حلولاً مضبوطة. فإذا كان النظام كبيراً من ناحية عدد المعادلات أو عدد المجاهيل، أو احتوت مصفوفة معاملاته على أعدادٍ عشرية، فإن الخطأ الناتج عن كثرة العمليات الحسابية يزداد، وبالتالي يزداد خطأ التقريب.

الباب الحالي يقدم نوعاً جديداً من التقنيات *(Techniques)* لحل أنظمة المعادلات الجبرية الخطية. هذه التقنيات تسمى "الطرق التكرارية" *(Iterative Methods)*، غير أن هذه الطرق التكرارية سوف تستخدم في حالة النظم الخطية غير المتجانسة والمربعة فقط، وذلك بعد أن يتم تحويلها — بالطبع — إلى الشكل المصفوفي.

في الواقع إنّ الفائدة الكبيرة لهذه الطرق التكرارية تكمن في كونها قادرة على إعطاء حلول أفضل من المعطاة بواسطة الطرق المباشرة، وخصوصاً في حالة النظم الكبيرة أو التي تحتوي مصفوفات معاملاتها على أعدادٍ عشرية كبيرة. أيضاً عندما تكون مصفوفة معاملات النظام من النوع الذي يسمى بالإنجليزية *(Sparse)*، وهي تلك المصفوفة التي يكون فيها أكبر عدد من عناصرها أصفاراً فإن استخدام الطرق التكرارية يكون أفضل من الطرق المباشرة لأنه، يقلل خطأ الحسابات ووقتها أيضاً.

6.1 الطرق التــــــكرارية - Iterative Methods

هذه الطرق تعتمد ــ في البداية ــ على اســتخدام تقريــب أولي *(Initial Approximation)* للحل بغرض الحصول منه علـــى مـــا يسمى بالتقريب الصفري للحل *(Zero Approximation)*. حيث يمكن بعد ذلك استخدام التقريب الصفري للحصول على التقريب الأول *(First Approximation)*؛ وبالتكرار (لهذا السبب تـــسمى الطريقة بالطريقة التكرارية أو الطريقة المتتالية) يمكن الحصول على التقريب الثاني فالتقريب الثالث، وهكذا نستمر في هذه العملية حتى ثبات الحل، وعندها تنتهي الطريقة ونحصل على أدق تقريب يكون قريباً من الحل المضبوط *(Close to the Exact)*. لنفرض ــ مثلاً ــ النظام

$$\begin{array}{ccccc} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + & \cdots & + a_{1n}x_n & = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + & \cdots & + a_{2n}x_n & = b_2 \\ \cdots \quad \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + & \cdots & + a_{nn}x_n & = b_n \end{array} \tag{6.1}$$

من الواضح أن هذا نظام من المعادلات الجبرية الخطية غير المتجانس، يتكون من عدد n من المعادلات، وعدد n مجهول $\{x_i\}_{i=1}^{n}$؛ حيث مصفوفة معاملاته a_{ij} من الرتبة $n \times n$ وتحتوي مصفوفة الهـــدف على عدد n من الحدود المطلقة $b_j\,, j = \overline{1,n}$.

لنفرض أن المطلوب هو إيجاد حل لهذا النظام، أي أن المطلوب هـــو إيجاد قيم كل المجاهيل $\{x_i\}_{i=1}^{n}$، والتي تحقق النظام. لنـــضع ـــ أولاً ـــ النظام (5.1) في الصورة المصفوفية

$$AX = B \tag{6.2}$$

هنا المصفوفة X هي مصفوفة الحل أو مصفوفة المجاهيـــل المطلـــوب إيجاد قيم عناصرها، بينما المصفوفة B هي مصفوفة الهدف المعطـــاة. أما المصفوفة A فهي مصفوفة المعاملات والمعطاة أيضاً.

لنفرض أن $X^{(0)}$ ترمز لمصفوفة الحل التقريبي الصفري، ولنفـــرض أن هذه المصفوفة $X^{(0)}$ قد تم الحصول عليها باستخدام تقريب أولي مناسب.

بما أن $X^{(0)}$ تعتبر حلاً للنظام (6.2)، إذن، فبالتعويض بها في النظام (6.2) فإنها تحققه، وبالتالي نحصل على حل تقريبي آخر هـــو الحـــل التقريبي الأول، نرمز له بالرمز $X^{(1)}$. وبالاســـتمرار في الحـــصول على الحلول المتتالية أو التكرارية يمكن أن نحصل علـــى التقريـــب الثاني، ثم الثالث، وهكذا حتى نحصل في النهاية على متتابعة الحلول التقريبية $\left\{X^{(k)}\right\}_{k=0}^{\infty}$. هذا، وليس من الضروري أن يوجد للنظام حلل تكراري، إذ توجد شروط معينة لضمان تقارب متتابعة الحلول

التقريبية $\left\{X^{(k)}\right\}_{k=0}^{\infty}$ إلى مصفوفة الحل المضبوط X. فإذا كان ما يسمى "نصف قطر الطيـــف" *(Spectral Radius)* لمـــا يـــسمى "بالمصفوفة التكرارية" *(Iteration Matrix)* أقـــل مـــن الواحـــد الصحيح فإن الحل يكون تقاربياً ــ كما سنرى. ويجب التنويـــه إلى أن نجاح الطرق التكرارية يعتمد بالدرجة الأولي علـــى نجاحـــك في اختيار التقريب الصفري، وعلى معدل التقارب لمتتابعـــة الحلـــول التكرارية $\left\{X^{(k)}\right\}_{k=0}^{\infty}$. فكلما كان نصف قطر الطيف صغيراً كلما كان التقارب سريعاً. وسوف نقدم طريقتين للحصول على الحلول التقريبية بواسطة الطرق التكرارية. الطريقة الأولي تسمى طريقـــة جاكوبي، والطريقة الثانية تسمى طريقة زايدل.

6.2 طريقة جـــاكـوبي - Jacobi Iterative Method

تتكون هذه الطريقة من عدة خطوات متتالية تنتهي بالحصول علـــى الحل التكراري. لنعتبر النظام غير المتجـــانس (5.1)، ولنفـــرض أن المعـــاملات، a_{ii}، هـــي معـــاملات غـــير صـــفرية، بمعـــنى أن $a_{ii} \neq 0 \;\; \forall i = \overline{1,n}$.

الآن يتم قسمة المعادلة الأولي في النظام (5.1) على العنـــصر غـــير الصفري a_{11}، وقسمة المعادلة الثانية على العنصر غـــير الـــصفري

a_{22}، وهكذا حتى نصل إلى المعادلة الأخيرة، والتي يتم قسمتها ـــ أيضاً ـــ على العنصر غير الصفري a_{nn} فيتحول بـــذلك النظـــام (6.1) إلى النظام

$$\begin{aligned}
x_1 &= \frac{b_1}{a_{11}} - \frac{a_{12}}{a_{11}}x_2 - \frac{a_{13}}{a_{11}}x_3 - \cdots - \frac{a_{1n}}{a_{11}}x_n \\
x_2 &= \frac{b_2}{a_{22}} - \frac{a_{21}}{a_{22}}x_1 - \frac{a_{23}}{a_{22}}x_3 - \cdots - \frac{a_{2n}}{a_{22}}x_n \\
&\cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \\
x_n &= \frac{b_n}{a_{nn}} - \frac{a_{n1}}{a_{nn}}x_1 - \frac{a_{n2}}{a_{nn}}x_2 - \cdots - \frac{a_{nn-1}}{a_{nn}}x_{n-1}
\end{aligned} \qquad (6.3)$$

لتبسيط هذا النظام يـــتم اســـتبدال العناصـــر $T_1, T_2, ..., T_n$ بالعناصر $\frac{b_1}{a_{11}}, \frac{b_2}{a_{22}}, ..., \frac{b_n}{a_{nn}}$ على الترتيب. كما يتم ـــ أيضاً ـــ استبدال العناصـــر c_{ij} بالعناصـــر $-\frac{a_{ij}}{a_{ii}}$، حيـــث $i = \overline{1,n}$، $j = \overline{1,n}$ فيتحول بذلك النظام (6.3) إلى الشكل

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ \vdots \\ T_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \qquad (6.4)$$

أو الشكل المصفوفي

$$\mathbf{X} = \mathbf{T} + \mathbf{C}\mathbf{X} \tag{6.5}$$

حيث

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} ; \mathbf{T} = \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ \vdots \\ T_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{b_1}{a_{11}} \\ \dfrac{b_2}{a_{22}} \\ \vdots \\ \dfrac{b_n}{a_{nn}} \end{bmatrix} ;$$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \dfrac{a_{12}}{a_{11}} & \dots & \dfrac{a_{1n}}{a_{11}} \\ \dfrac{a_{21}}{a_{22}} & 0 & \dots & \dfrac{a_{2n}}{a_{22}} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \dfrac{a_{n1}}{a_{nn}} & \dfrac{a_{n2}}{a_{nn}} & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

إن طريقة جاكوبي للتقريب المتتالي نسبة إلى عالم الرياضيات الألماني جاكوبي (*Jacobi*, 1804 - 1851) تفترض تقريباً أو حلاً مبـــدئياً كحل النظام (6.5) هو التقريب $\mathbf{X} = \mathbf{O}$. حيث ترمز المصفوفة $\mathbf{O}$ للمصفوفة الصفرية، أي أن التقريب المبدئي هو

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \tag{6.6}$$

هذا، ولأن $\mathbf{X} = \mathbf{O}$ يعتبر حلاً للمعادلة المصفوفية أو النظـــام (6.5) إذن فهو يحققها، إذن وبالتعويض من (6.6) في الطرف الأيمن مـــن المعادلة المصفوفية (6.5) نحصل على الحل التقريبي الصفري $\mathbf{X}^{(0)}$، والذي يأخذ عندئذٍ الشكل

$$\mathbf{X}^{(0)} = \begin{bmatrix} x_1^{(0)} \\ x_2^{(0)} \\ \vdots \\ x_n^{(0)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ \vdots \\ T_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \tag{6.7}$$

أو

$$X^{(0)} = \begin{bmatrix} x_1^{(0)} \\ x_2^{(0)} \\ \vdots \\ x_n^{(0)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ \vdots \\ T_n \end{bmatrix} = \mathbf{T} \tag{6.8}$$

الآن يمكن اعتبار $\mathbf{X}^{(0)} = \mathbf{T}$ المعطـــى في (6.8) حـــلاً للمعادلـــة المصفوفية أو النظام (6.5)، وبالتالي فهو يحققها. إذن وبالتعويض عن

$\mathbf{X}^{(0)} = \mathbf{T}$ في الطرف الأيمن من المعادلة (6.5) نحصل على الحـــل التقريبي الأول $\mathbf{X}^{(1)}$، والذي يأخذ عندئذٍ الشكل

$$\mathbf{X}^{(1)} = \begin{bmatrix} x_1^{(1)} \\ x_2^{(1)} \\ \vdots \\ x_n^{(1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ \vdots \\ T_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ \vdots \\ T_n \end{bmatrix} \tag{6.9}$$

أو

$$\mathbf{X}^{(1)} = \mathbf{T} + \mathbf{C}\mathbf{X}^{(0)} \tag{6.10}$$

هكذا، وبالتكرار يمكن أن نحصل على التقريـــب $\mathbf{X}^{(k+1)}$ كحـــل تقريبي تكراري، وذلك من القانون

$$\mathbf{X}^{(k+1)} = \mathbf{T} + \mathbf{C}\mathbf{X}^{(k)}; \quad k \geq 0 \tag{6.11}$$

فإذا تقاربت فئة الحلول التقريبية التكرارية $\left\{\mathbf{X}^{(k)}\right\}_{k=0}^{\infty}$ إلى النهاية $\lim\limits_{k \to \infty} \mathbf{X}^{(k)}$، وكانت هذه النهاية موجودة بمعنى أنها تساوي عدداً حقيقياً، فعندئذٍ نقول أن الحل التقريبي التكراري للنظام (6.5) أو ـــ بالأحرى ـــ النظام (6.1) هو $\mathbf{X}$ حيث

$$\mathbf{X} = \lim_{k \to \infty} \mathbf{X}^{(k)} \tag{6.12}$$

مثال 6.1 أوجد حل النظام

$$8x_1 + x_2 + x_3 = 26$$
$$x_1 + 5x_2 - x_3 = 7$$
$$x_1 - x_2 + 5x_3 = 7$$

الحل هذا نظام خطي غير متجانس من المعادلات الجبرية. بدايـــةً يـــتم اختزال النظام المعطى إلى الشكل

$$x_1 = \frac{26}{8} - \frac{1}{8}x_2 - \frac{1}{8}x_3$$
$$x_2 = \frac{7}{5} - \frac{1}{5}x_1 + \frac{1}{5}x_3$$
$$x_3 = \frac{7}{5} - \frac{1}{5}x_1 + \frac{1}{5}x_2$$

أو

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{26}{8} \\ \frac{7}{5} \\ \frac{7}{5} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{8} & -\frac{1}{8} \\ -\frac{1}{5} & 0 & \frac{1}{5} \\ -\frac{1}{5} & \frac{1}{5} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \qquad \text{(i)}$$

حيث نجد أن

$$T = \begin{bmatrix} \frac{26}{8} \\ \frac{7}{5} \\ \frac{7}{5} \end{bmatrix}, \; C = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{8} & -\frac{1}{8} \\ -\frac{1}{5} & 0 & \frac{1}{5} \\ -\frac{1}{5} & \frac{1}{5} & 0 \end{bmatrix}$$

وباستخدام (6.8) نحصل على التقريب الصفري، والذي يساوي عمود الحدود الثابتة، أي أن

$$\mathbf{X}^{(0)} = \begin{bmatrix} x_1^{(0)} \\ x_2^{(0)} \\ x_3^{(0)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{26}{8} \\ \frac{7}{5} \\ \frac{7}{5} \end{bmatrix} \qquad \text{(ii)}$$

بالتعويض عن التقريب الصفري، $\mathbf{X}^{(0)}$، من (ii) في النظام (i) نحصل على التقريب الأول $\mathbf{X}^{(1)}$، إذن

$$X^{(1)} = \begin{bmatrix} x_1^{(1)} \\ x_2^{(1)} \\ x_3^{(1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{26}{8} \\ \frac{7}{5} \\ \frac{7}{5} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{8} & -\frac{1}{8} \\ -\frac{1}{5} & 0 & \frac{1}{5} \\ -\frac{1}{5} & \frac{1}{5} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{26}{8} \\ \frac{7}{5} \\ \frac{7}{5} \end{bmatrix} \qquad \text{(iii)}$$

أو

$$\mathbf{X}^{(1)} = \begin{bmatrix} x_1^{(1)} \\ x_2^{(1)} \\ x_3^{(1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.90 \\ 1.03 \\ 1.03 \end{bmatrix}$$

بالتعويض عن التقريب الأول، $\mathbf{X}^{(1)}$، من (iii) في النظام (i) نحصل على التقريب الثاني $\mathbf{X}^{(2)}$، إذن

$$X^{(2)}=\begin{bmatrix}x_1^{(2)}\\x_2^{(2)}\\x_3^{(2)}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{26}{8}\\\frac{7}{5}\\\frac{7}{5}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0&-\frac{1}{8}&-\frac{1}{8}\\-\frac{1}{5}&0&\frac{1}{5}\\-\frac{1}{5}&\frac{1}{5}&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2.9\\1.03\\1.03\end{bmatrix}$$

أو

$$\mathbf{X}^{(2)}=\begin{bmatrix}x_1^{(2)}\\x_2^{(2)}\\x_3^{(2)}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2.9925\\1.0260\\1.0260\end{bmatrix} \qquad \textbf{(iii)}$$

وبالاستمرار نجد أن

$$\mathbf{X}^{(3)}=\begin{bmatrix}x_1^{(3)}\\x_2^{(3)}\\x_3^{(3)}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2.9935\\1.0670\\1.0670\end{bmatrix},\ \mathbf{X}^{(4)}=\begin{bmatrix}x_1^{(4)}\\x_2^{(4)}\\x_3^{(4)}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2.998325\\1.02640\\1.02640\end{bmatrix}$$

والتقريب الخامس هو

$$\mathbf{X}^{(5)}=\begin{bmatrix}x_1^{(5)}\\x_2^{(5)}\\x_3^{(5)}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2.99934\\1.06863\\1.06863\end{bmatrix}$$

ونكتفي بالتقريب الخامس، وذلك لأن الفرق بينه وبـــين التقريـــب الرابع بسيط جداً، الأمر الذي يعني ثبات الحل، وإذا رمزنا للحـــل $X^{(5)}$ بالرمز $\tilde{X}$ ، فإن الحل التقريبي التكراري للنظام المعطى يكون

$$\tilde{X} = [2.9993 \quad 1.0009 \quad 1.0009]^t \qquad \text{(iv)}$$

✍.



يعتبر حلاً رائعاً إذ بإمكانك التأكد من أن الحل الفعلـــي *(Actual Solution)* أو الحل المضبوط لهذا النظام ـــــ والذي يمكن الحصول عليه بأكثر من طريقة ـــــ هـــو

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3.00 \\ 1.00 \\ 1.00 \end{bmatrix}$$

ملاحظة

في الواقع يمكنك الحصول علـــى الحـــل المـــضبوط باستخدام طريقة جاكوبي التكرارية بعد ثماني عمليات تكرارية. إذ أن

$$X^{(8)} = \begin{bmatrix} x_1^{(8)} \\ x_2^{(8)} \\ x_3^{(8)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

سنحاول ـــ الآن ـــ دراسة الشروط، التي يجب توافرها في النظـــام الخطي لكي يوجد له حل تكراري، وكذلك سنحاول معرفة كـــم عدد الخطوات التكرارية اللازمة للحصول على الحل التكـــراري، الذي يتقارب إلى الحل المضبوط. على أننـــا في حاجـــة ـــ الآن ـــ لتقديم بعض التعريفات والنظريات الضرورية لمعرفة تقارب الحلول التكرارية. ولكن قبل تقديم هذه التعريفات دعنا نتفق ـــ بدايـــةً ـــ على أن الأشياء ذات الطبيعة الواحدة يمكن أن تختلف بعضها عـــن البعض في الصفات والخصائص. وللتمييز بين هذه الأشياء ـــ عادة ما نبحث عن الحجم، الطول، المقدار، الوزن وغيره. فمثلاً بالنسبة إلى الأعداد الحقيقية نستخدم مفهوم المقياس *(Modulus)* لمعرفـــة مقدار *(Magnitude)* العدد.

بالنسبة للمصفوفات فالأمر يختلف. ولِذا فالسؤال الـــذي يطـــرح نفسه هو كيفية معرفة مقدار المصفوفة!! بالتأكيد لايوجد للمصفوفة مقدار، وذلك لأنها ببساطة عبارة عن ترتيب معين مـــن الأشـــياء. فحتى ولو كانت هذه الأشياء أعداداً فلا يمكـــن معرفـــة مقـــدار المصفوفة لأننا لانعرف أي عدد من عناصر المصفوفة هو الذي يحدد مقدارها فهناك عناصر كبيرة في المقدار، وهناك عناصر صغيرة. من هنا جاء مفهوم المعيار *(Norm)*، والذي يميز بين مصفوفة ومصفوفة

أخرى طبقاً لمقادير جميع عناصرها ككل. وهكذا يمكن أن نقول أن للعدد يوجد **مقدار**، أما المصفوفة فيوجد لها **معيار**.

هذا، وتوجد أنواع كثيرة ومتنوعة من المعيـــارات للمـــصفوفات. فيوجد المعيار باستخدام كل مكونـــات المـــصفوفة أي الـــصفوف والأعمدة، ويوجد معيار بالنسبة لصفوف المصفوفة فقط، كما يوجد معيار بالنسبة للأعمدة فقط.

تعريف 6.1

معيـــــار المـــتجه
Norm of a Vector

لنفرض أن الفئة R^n هي فئة كل مصفوفات العمود، والتي عـــدد صفوفها العدد n وكل عناصرها أعداد حقيقية.

ولنفرض أن X مصفوفة عمود تنتمي إلى انفئة R^n. يُعرَّف **"معيار"** مصفوفة العمود X، والمعرفة على الفئة R^n على أنه دالة من الفئة R^n إلى مجال الأعداد الحقيقية R. فإذا رمزنا لهذا المعيـــار بـــالرمز $\|X\|$ فإن هذا المعيار يجب أن يحقق الأربعة شروط التالية:

$$(1)\ \|X\| \geq 0 \quad \forall\ X \in R^n$$

$$(2)\ \|X\| = 0 \ \text{ iff } \ X = O \ ;\ O\text{ - } Zero\ Column\ Matrix$$

$$(3)\ \|\alpha X\| = \|\alpha\| \cdot \|X\| \quad \forall\ \alpha \in R, X \in R^n$$

$$(4)\ \|X + Y\| \leq \|X + Y\| \quad \forall\ X, Y \in R^n$$

▲▲▲

هذا، وتجدر الإشارة إلى أنه يوجد نــوعين مــن معيــار مـــصفوفة العمود $\mathbf{X}=[x_1 \quad x_2 \quad x_3 \quad \ldots \quad x_n]^t$. النوع الأول نرمز له بالرمز $\|\mathbf{X}\|_2$، والنوع الثاني نرمز له بالرمز $\|\mathbf{X}\|_\infty$، وهما يعرفان ـــ على الترتب ـــ في الأشكال

$$\|\mathbf{X}\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i)^2} \quad \& \quad \|\mathbf{X}\|_\infty = \max_{1\le i\le n}\|x_i\| \tag{6.13}$$

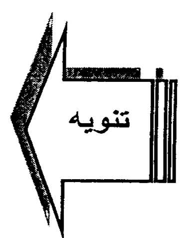
لنعتبر مصفوفتي العمود $\mathbf{X}, \mathbf{Y}$ حيث $\mathbf{X},\mathbf{Y}\in R^n$ على النحو التالي

$$\mathbf{X}=(x_1,x_2,\ldots,x_n)^t \quad \& \quad \mathbf{Y}=(y_1,y_2,\ldots,y_n)^t$$

إذن فإن

$$\|\mathbf{X}-\mathbf{Y}\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i-y_i)^2} \tag{6.14}$$
$$\|\mathbf{X}-\mathbf{Y}\|_\infty = \max_{1\le i\le n}\|x_i-y_i\|$$

▲▲▲



إذا فرضنا مصفوفة العمـــود $\mathbf{X}=[x_1 \quad x_2 \quad x_3]^t$. فإننا نكتشف من (6.13) أن المعيار $\|\mathbf{X}\|_2$ مـــا هـــو إلا طول المسافة المستقيمة $d(P,O)$ من نقطـــة الأصـــل $O(0,0,0)$ إلى النقطة $P(x_1,x_2,x_3)$. إذن

$$d(P,O)=\sqrt{(x_1-0)^2+(x_2-0)^2+(x_3-0)^2}$$
$$=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i)^2}$$

لهذا السبب فإن المعيار الذي من النـــوع $\|X\|_2$ يـــسمى بالمعيـــار الأقليدي *(Euclidean Norm)* لمصفوفة العمود X.



لنفرض أن X هو (مصفوفة عمود) أو متجـــه الحـــل المضبوط لنظام ما من المعادلات الجبرية الخطية من الرتبة الثالثة، ولنفرض أن المتجه $\tilde{X}$ هو متجه الحل التكراري باستخدام طريقة جاكوبي التكرارية بحيث كان

$$X=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\2\\-1\end{bmatrix},\quad \tilde{X}=\begin{bmatrix}\tilde{x}_1\\\tilde{x}_2\\\tilde{x}_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1.2001\\1.9999\\-1.1000\end{bmatrix}$$

إذن فإن

بالنسبة للمتجه X

$$\|X\|_\infty=\max\{\|1\|,\|2\|,\|-1\|\}=\max\{1,2,1\}=2,$$

$$\|X\|_2=\sqrt{(1)^2+(2)^2+(-1)^2}=\sqrt{6}\approx 2.45\ ;$$

بالنسبة للمتجه $\tilde{X}$

$$\|\tilde{X}\|_\infty=\max\{\|1.2001\|,\|1.9999\|,\|-1.1000\|\}$$

$$= \max\{1.2001, 1.9999, 1.1000\} = 1.9999 ;$$

$$\|\tilde{X}\|_2 = \sqrt{(1.2001)^2 + (1.9999)^2 + (-1.100)^2} \approx 2.58 ;$$

ايضاً فإن

$$\|X - \tilde{X}\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \tilde{x}_i)^2}$$

$$= \sqrt{(x_1 - \tilde{x}_1)^2 + (x_2 - \tilde{x}_2)^2 + (x_3 - \tilde{x}_3)^2}$$

$$= \sqrt{(1 - 1.2001)^2 + (2 - 1.9999)^2 + (-1 + 1.1000)^2} \approx 0.2237$$

كما أن

$$\|X - \tilde{X}\|_\infty = \max_{1 \le i \le 3} \|x_i - \tilde{x}_i\| = \max\{0.2001, 0, 0.1\} = 0.2001$$

نظرية - 6.1 تقارب الحلول الـــــــتكرارية Convergence Theorem

لنفرض أن $\left\{X^{(k)}\right\}_{k=1}^{\infty}$ هي متتابعة *(Sequence)* من المتجهات في الفئة R^n حيث $X^{(k)} = \left[x_1^{(k)} \; x_2^{(k)} \; \ldots \; x_n^{(k)}\right]^t$ إذن فإن:

(1) المتتابعة $\left\{X^{(k)}\right\}_{k=1}^{\infty}$ تتقارب في الفئة R^n إلى المتجه الوحيـــد X *(Unique Vector)* بالنـــــسبة إلى المعيـــار $\| \; \|_\infty$ ، حيـــث $X = [x_1 \; x_2 \; x_3 \; x_4]^t$ إذا كان وفقط إذا كان

$$\lim_{k\to\infty} x_i^{(k)} = x_i \quad \forall\ i = \overline{1,n} \tag{6.15}$$

(2) المعيار $\|X\|_2$ يمكن الحصول عليه باستخدام العلاقة

$$\|X\|_\infty \le \|X\|_2 \le \sqrt{n}\ \|X\|_\infty \quad \forall\ X \in R^n \tag{6.16}$$

✪✪✪

مثال 6.2 ادرس في الفئة R^5 تقارب المتتابعة .

$$\left\{X^{(k)}\right\}_{k=1}^{\infty}$$

$$X^{(k)} = \begin{bmatrix} 2 & \left(1+\frac{1}{k}\right) & \frac{1}{k^2} & e^{-4k} & \cos\left(\frac{1}{k}\right) \end{bmatrix}^t$$

الحل من نظرية (6.1) نجد أن

$$\lim_{k\to\infty} x_1^{(k)} = \lim_{k\to\infty}(2) = 2, \quad \lim_{k\to\infty} x_2^{(k)} = \lim_{k\to\infty}\left(1+\frac{1}{k}\right) = 1$$

$$\lim_{k\to\infty} x_3^{(k)} = \lim_{k\to\infty}\left(\frac{1}{k^2}\right) = 0, \quad \lim_{k\to\infty} x_4^{(k)} = \lim_{k\to\infty}\left(e^{-4k}\right) = 0$$

$$\lim_{k\to\infty} x_5^{(k)} = \lim_{k\to\infty}\left(\cos\frac{1}{k}\right) = 1$$

هكذا نجد أن المتتابعة $\left\{X^{(k)}\right\}_{k=1}^{\infty}$ تتقارب بالنـــسبة إلى المعيـــار $\|\ \|_\infty$ إلى المتجه $X=[2 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 1]^t$.

✍.

تعريف 6.2 — مـــــــعيار المصفوفة Norm of a Matrix

يُعرف معيار (يرمز له بالرمز $\| \|$) أية مصفوفة في الفئة Ω_n ، حيث Ω_n هي فئة كل المصفوفات المربعة من الرتبة $n \times n$ على أنه دالة في المتغير الحقيقي *(Real-Valued Function)* وبحيث يحقق لأيـــة مصفوفتين A,B في الفئة Ω_n الخمسة شروط التالية:

(1) $\|A\| \geq 0$

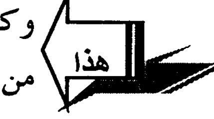
(2) $\|A\| = 0$ iff $A = O$; O-*Zero Matrix*

(3) $\|\alpha A\| = \|\alpha\| \cdot \|A\|$

(4) $\|A+B\| \leq \|A\| + \|B\|$

(5) $\|AB\| \leq \|A\| \cdot \|B\|$

▲▲▲



وكما عرفنا نوعين من معيارات مصفوفة العمود نعَّرف الآن نوعين من معيارات المصفوفة تسمى المعيارات الطبيعية للمصفوفة.

النوع الأول يرمز له بالرمز $\|A\|_2$، والنوع الثاني يرمز له بـــالرمز $\|A\|_\infty$، وهما يعرفان في الأشكال على النرتيب

$$\|A\|_2 = \max_{\|X\|_2 = 1} \|AX\|_2 \quad \& \quad \|A\|_\infty = \max_{\|X\|_\infty = 1} \|AX\|_\infty \qquad (6.17)$$

هذا، ويمكن ـــ أيضاً ـــ تعريف المسافة بين المصفوفتين A,B في الفئة Ω_n بالنسبة إلى معيار المصفوفة $\| \|$ على أنها $\|A - B\|$.

▲▲▲



تعريف 6.3

نصف قطر الطيـــف للمصفوفة
Spectral Radius of a Matrix

يُعرَّف نصف قطر الطبف للمصفوفة $A=\left(a_{ij}\right)$ مـــن الرتبـــة n ويرمز له بالرمز $\rho(A)$ على أنه

$$\rho(A)=\max\left|\lambda_i\right| \tag{6.18}$$

حيث λ_i هي القيم المميزة *(Eigenvalues)* للمصفوفة A. على أنه إذا كانت القيمة المميزة عدداً مركباً في الـــشكل $\lambda=\alpha+\beta i$ مثلاً فإن

$$|\lambda|=\sqrt{\alpha^2+\beta^2}$$

▲▲▲

نظرية ـ 6.2

حساب معيار المصفوفة

يمكن حساب المعيارين $\|A\|_2$ ، $\|A\|_\infty$ للمصفوفة A في الفئة Ω_n، حيث
$$A=\left(a_{ij}\right);\ i,j=\overline{1,n}$$
من العلاقتين :

$$\|A\|_\infty=\max_{1\le i\le n}\sum_{j=1}^{n}\left|a_{ij}\right| \tag{6.19}$$

$$\|A\|_2=\left(\max_{1\le i\le n}\left|\lambda_i\right|\right)^{\frac{1}{2}} \tag{6.20}$$

حيث λ_i هي القيم المميزة لحاصل ضـــرب المــصفوفتين $A^t A$، بالطبع A^t هو مدور *(Transpose)* المصفوفة A. كما أن

$$\rho(A) \le \|A\|, \text{ for any norm } \|\ \| \tag{6.21}$$

✪✪✪



أن الصورة (5.20) من النظرية (5.2) تأخذ الشكل

$$\|A\|_2 = \left(\rho\left(A^t A\right)\right)^{\frac{1}{2}} \tag{6.22}$$

مثال 6.3 أوجد المعيارين $\|A\|_2$, $\|A\|_\infty$، إذا كانت

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$



بتطبيق النظرية (6.2) نجد أن

$$\sum_{j=1}^{3} |a_{1j}| = |1| + |1| + |0| = 2; \quad \sum_{j=1}^{3} |a_{2j}| = |1| + |2| + |1| = 4;$$

$$\sum_{j=1}^{3} |a_{3j}| = |-1| + |1| + |2| = 4$$

وبالتالي فإن (6.19) تُعطي

$$\|A\|_\infty = \max_{1 \le i \le n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| = \max\{2,\ 4,\ 4\} = 4$$



أيضاً فإن

$$A^t A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 2 & 6 & 4 \\ -1 & 4 & 5 \end{bmatrix}$$

إذن فإن

$$\left|A^t A - \lambda I\right| = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} 3-\lambda & 2 & -1 \\ 2 & 6-\lambda & 4 \\ -1 & 4 & 5-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

إذن، فالقيم المميزة هي

$$\lambda_1 = 0,\ \lambda_2 = 4.3542,\ \lambda_3 = 9.6450$$

وبالتالي نجد من العلاقة (6.20) أن

$$\|A\|_2 = \left(\max_{1 \le i \le n} |\lambda_i|\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\max\{0,\ 4.3542,\ 9.6450\}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\approx 3.1$$

6.3 شروط التقارب للحلول الـــتكرارية Convergence Conditions

بداية يجب ملاحظة أن حل أي نظام خطي غـــير متجـــانس مـــن المعادلات مثل النظام $AX = B$ المعطى في (5.1) يتطلب أن تكـــون المعاملات $\{a_{ii}\}_{i=1}^{n}$ معاملات غير صفرية، أي

يتطلب أن يكون $a_{ii} \neq 0;\ i = \overline{1,n}$. فإذا كانت هناك معاملات من النوع $\{a_{ii}\}_{i=1}^{n}$ صفرية فيجب إعادة ترتيب النظام حتى لاتكون هناك أية معاملات صفرية من المعاملات $\{a_{ii}\}_{i=1}^{n}$.

ثانية، يجب الأخذ في الاعتبار أنه كلما كانت المعاملات $\{a_{ii}\}_{i=1}^{n}$ كبيرة في المقدار بدرجة كافية فإن هذا يسرع عملية تقارب الحـــل، وبالتالي يقلل من عمليات التكرار *(Iterations)*، أيضاً قد ذكرنا أن عملية التكرار للحصول على متتابعة الحلول التكراريـــة يجـــب أن تتوقف بمجرد ثبات الحل التكراري؛ بمعنى أن يكون الفرق بين حلين متتالين يقترب من الصفر، أو أن يكون هذا الفرق ثابتاً، هذا يعـــني ـــ رياضياً ـــ أن عملية التكرار يجب أن تتوقف بمجرد أن تتحقـــق المتباينة التالية

$$\frac{\left\| X^{(k)} - X^{(k-1)} \right\|}{\left\| X^{(k)} \right\|} < \delta\ ; \quad \delta > 0 \tag{6.23}$$

حيث يمكنك ـــ الآن ـــ مقارنة هذه المتباينة مع مفهوم الخطأ النسبى في الباب الصفري من كتاب التحليل العددي التطبيقي للمؤلـــف، توزيع الأهرام. واليك الآن نظرية تقـــارب الحلـــول التكراريـــة، وحساب الخطأ الناتج عن استخدام طريقة جاكوبي التكرارية.

نظرية - 6.3 حساب خطأ الحلول التكرارية

إذا أمكن وضع النظام (5.1) على الشكل $X = T + CX$ كمـــا في (5.5) وكان معيار المصفوفة التكرارية C أقل من الواحد الصحيح، أي إذا كان $\|C\| < 1$ حيث $\|\ \|$ هو أي معيار طبيعي فإن متتابعـــة الحلـــول التكراريـــة $\left\{X^{(k)}\right\}_{k=0}^{\infty}$ المعطـــاة في (6.11) حيـــث $X^{(0)} \in R^n$ هو أي تقريب أولي مناسب، تتقارب إلى متجه الحـــل الفعلي أو الحل المضبوط $X \in R^n$، وبحيث يُعطى خطأ التقريب من إحدى المتباينات

$$\left\|X - X^{(k)}\right\| \le \|C\|^k \left\|X^{(0)} - X\right\| \qquad (6.25)$$

$$\left\|X - X^{(k)}\right\| \le \frac{\|C\|^k \left\|X^{(1)} - X^{(0)}\right\|}{1 - \|C\|} \qquad (5.26)$$

✪✪✪



من نظرية (5.5) يمكن استبدال المعيـــار $\|C\|_\infty$ بالمعيـــار $\|C\|$، وبالتالي فإن شرط التقارب (5.24) يتحـــول إلى شرط المعيار بالنسبة إلى الصفوف، أي الشرط

$$\|C\|_\infty = \max_{1\le i\le n} \sum_{j=1}^{n} |c_{ij}| < 1 \qquad (6.27)$$

أو شرط المعيار بالنسبة إلى الأعمدة

$$\|C\|_\infty = \max_{1\le j\le n} \sum_{i=1}^{n} |c_{ij}| < 1 \qquad (6.28)$$

أيضاً، باستخدام (5.22) فإن شرط التقارب $\|C\| < 1$ يأخذ الشكل

$$\|C\|_2 = \left(\rho\left(C^t C\right)\right)^{\frac{1}{2}} < 1 \qquad (6.29)$$

مثال 6.4 ادرس النظام في المثال (6.1)، واحسب خطأ التقريب.



يمكن دراسة تقارب الحل باستخدام أياً من الثلاثة شروط (6.27), (5.28), (5.29). بما أن

$$C = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{8} & -\frac{1}{8} \\ -\frac{1}{5} & 0 & \frac{1}{5} \\ -\frac{1}{5} & \frac{1}{5} & 0 \end{bmatrix}$$

إذن

$$\sum_{j=1}^{n} |c_{1j}| = |0| + \left|-\frac{1}{8}\right| + \left|-\frac{1}{8}\right| = \frac{1}{4};$$

$$\sum_{j=1}^{n}|c_{2j}| = \left|-\frac{1}{5}\right| + |0| + \left|\frac{1}{5}\right| = \frac{2}{5};$$

$$\sum_{j=1}^{n}|c_{3j}| = \left|\frac{1}{5}\right| + \left|\frac{1}{5}\right| + |0| = \frac{2}{5}$$

الأمر الذي يعني أن الحل التكراري هو حل تقاربي حيث إن شرط التقارب (6.27) يعطي

$$\|C\|_\infty = \max_{1\le i\le n}\sum_{j=1}^{n}|c_{ij}| = \max\left\{\frac{1}{4},\frac{2}{5},\frac{2}{5}\right\} = \frac{2}{5} = 0.4 < 1$$

أيضاً لدينا

$$\sum_{i=1}^{n}|c_{i1}| = |0| + \left|-\frac{1}{5}\right| + \left|-\frac{1}{5}\right| = \frac{2}{5};$$

$$\sum_{i=1}^{n}|c_{i2}| = \left|-\frac{1}{8}\right| + |0| + \left|\frac{1}{5}\right| = \frac{13}{40};$$

$$\sum_{i=1}^{n}|c_{i3}| = \left|-\frac{1}{8}\right| + \left|\frac{1}{5}\right| + |0| = \frac{13}{40}$$

الأمر الذي يعني تقارب الحل التكراري حيث إن شرط التقـــارب (6.28) يعطي

$$\|C\|_\infty = \max_{1\le j\le n}\sum_{i=1}^{n}|c_{ij}| = \max\left\{\frac{2}{5},\ \frac{13}{40},\ \frac{13}{40}\right\} = \frac{2}{5} = 0.4 < 1$$

أيضاً من (6.29) نجد أن

$$\|C\|_2 = \left(\max\{0.3449,\ 0.1449,\ 0.2\}\right)^{\frac{1}{2}} \approx 0.59 < 1$$

✍.



العمليه التكرارية تتقارب إذا كانت كل العناصر c_{ij} في المصفوفة C للنظام $X = T + CX$ تحقق المتطابقة

$$|c_{ij}| < \frac{1}{n} \qquad (6.30)$$

حيث n هو رتبة المصفوفة C.

في المثال السابق ــ مثلاً ــ فإن $n = 3$، وبالتـــالي نجـــد أن كـــل العناصر c_{ij} تحقق المتطابقة $|c_{ij}| < \frac{1}{3} = \frac{1}{n}$ الأمر الـــذي يؤكـــد تقارب الحل التكراري.

6.4 الصورة القيـــــاسية للـــــــــنظام الخـــطي Normal Form of a Linear System

في بعض الأحيان تكون معاملات النظـــام، أي عناصـــر مـــصفوفة المعاملات ليست أعداداً صحيحة، بل أعداداً عشرية وعند استخدام طريقة جاكوبي التكرارية يزداد الخطأ *(Round-off Error)* الناتج عن اتمام العمليات الحسابية الجبرية مع تلك الأعداد العشرية. مـــن هنا جاءت الحاجة لجعل هذه المعاملات العشرية أعداداً صحيحة،

الأمر الذي يقلل خطأ العمليات الحسابية عند القسمة عليها أثنـــاء تطبيق طريقة جاكوبي التكرارية. لنفرض النظام الخطي

$$AX=B;\ A=(a_{ij});\ X=(x_i);\ B=(b_i);\ i,j=\overline{1,n}$$

نفرض ـــ أيضاً ـــ أن a_{ij} ليست أعداداً صحيحة. وللحصول على الصورة القياسية نعيد كتابة النظام، بحيث يـــصبح معامـــل x_1 في المعادلة الأولي على شكل العدد الصحيح α_1 ـــ مثلاً ـــ بدلاً مـــن a_{11}، ومعامل x_2 في المعادلة الثانية على الشكل α_2 ـــ مـــثلاً ـــ بدلاً من a_{22}، وهكذا حتى نصل إلى معامل x_n في المعادلة الأخيرة، والذي يصبح على الشكل α_n، حيث $\{\alpha_i\}_{i=1}^{n}$ هـــي أعـــداد صحيحة قريبة من المعاملات $a_{11}, a_{22}, ..., a_{nn}$ من مـــضاعفات الرقم 10.

مثال 6.5 أوجد باستخدام طريقة جاكوبي التكرارية حلاً للنظام

$$\begin{aligned} 7.6x_1+0.5x_2+2.4x_3&=1.9\\ 2.2x_1+9.1x_2+4.4x_3&=9.7\\ -1.3x_1+0.2x_2+5.8x_3&=-1.4 \end{aligned} \qquad \text{(i)}$$

الحل بداية، نضع النظام (i) في الشكل

$$\begin{aligned} 7.6x_1&=1.9-0.5x_2-2.4x_3\\ 9.1x_2&=9.7-2.2x_1-4.4x_3\\ 5.8x_3&=-1.4+1.3x_1-0.2x_2 \end{aligned} \qquad \text{(ii)}$$

وبما أن

$$\begin{aligned} 7.6x_1 &= 10x_1 - 2.4x_1 \\ 9.1x_2 &= 10x_2 - 0.9x_2 \\ 5.8x_3 &= 10x_3 - 4.2x_3 \end{aligned} \qquad \text{(iii)}$$

بالتعويض من (iii) في (ii) نحصل على

$$\begin{aligned} 10x_1 &= 1.9 + 2.4x_1 - 0.5x_2 - 2.4x_3 \\ 10x_2 &= 9.7 - 2.2x_1 + 0.9x_2 - 4.4x_3 \\ 10x_3 &= -1.4 + 1.3x_1 - 0.2x_2 + 4.2x_3 \end{aligned} \qquad \text{(iv)}$$

وبقسمة كل معادلات النظام (iv) على العدد 10، نحـــصل علـــى الصورة القياسية للنظام (i) في الشكل

$$\begin{aligned} x_1 &= 0.19 + 0.24x_1 - 0.05x_2 - 0.24x_3 \\ x_2 &= 0.97 - 0.22x_1 + 0.09x_2 - 0.44x_3 \\ x_3 &= -0.14 + 0.13x_1 - 0.02x_2 + 0.42x_3 \end{aligned} \qquad \text{(v)}$$

أو في الشكل المصفوفي

$$X = T + CX$$

حيث

$$C = \begin{bmatrix} 0.24 & -0.05 & -0.24 \\ -0.22 & 0.09 & -0.44 \\ 0.13 & -0.02 & 0.42 \end{bmatrix}, \quad T = \begin{bmatrix} 0.19 \\ 0.97 \\ -0.14 \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

الآن ـــ وقبل البدء في إيجاد الحل ـــ علينا التأكد مـــن أنـــه حـــلاً تقاربياً. ولمعرفة ما إذا كان الحل تقاربياً أم لا علينا التأكد مـــن أن

شرطاً واحداً ـــ على الأقل ـــ من الشروط الثلاثة ,(6.27), (6.28) (6.29) متحقق. من شرط معيار الصفوف (6.27) نجد أن

$$\|C\|_{\infty} = \max_{1 \le i \le n} \sum_{j=1}^{n} |c_{ij}| = \max\{0.53,\ 0.75,\ 0.57\} = 0.75 < 1$$

وبما أن

$$\sum_{i=1}^{n} \|c_{i1}\| = 0.59,\ \sum_{i=1}^{n} |c_{i2}| = 0.16,\ \sum_{i=1}^{n} |c_{i3}| = 1.1$$

إذن، من الشرط (6.28) نجد أن

$$\|C\|_{\infty} = \max_{1 \le j \le n} \sum_{i=1}^{n} |c_{ij}| = \max\{0.59,\ 0.16,\ 1.1\} = 1.1 > 1$$

أيضاً من (6.29) نجد أن

$$\|C\|_2 = \left(\max\{0.0010,\ 0.1020,\ 0.4582\}\right)^{\frac{1}{2}} \approx 0.68 < 1$$

وبالتالي فإن العملية التكرارية تتقارب حتى تصل إلى الحل الوحيد.

نأخذ التقريب الصفري على أنه مصفوفة الثوابت T، إذن فإن

$$\begin{bmatrix} x_1^{(0)} \\ x_2^{(0)} \\ x_3^{(0)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.19 \\ 0.97 \\ -0.14 \end{bmatrix}$$

ويكون التقريب الأول هو

$$\begin{bmatrix} x_1^{(1)} \\ x_2^{(1)} \\ x_3^{(1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.19 \\ 0.97 \\ -0.14 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.24 & -0.05 & -0.24 \\ -0.22 & 0.09 & -0.44 \\ 0.13 & -0.02 & 0.42 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.19 \\ 0.97 \\ -0.14 \end{bmatrix}$$

أو

$$\begin{bmatrix} x_1^{(1)} \\ x_2^{(1)} \\ x_3^{(1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.2207 \\ 1.0771 \\ -0.1935 \end{bmatrix}$$

والتقريب الثاني هو

$$\begin{bmatrix} x_1^{(2)} \\ x_2^{(2)} \\ x_3^{(2)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.2359 \\ 1.1035 \\ -0.2141 \end{bmatrix}$$

والتقريبان الثالث، والرابع هما على الترتيب

$$\begin{bmatrix} x_1^{(3)} \\ x_2^{(3)} \\ x_3^{(3)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.2427 \\ 1.1117 \\ -0.2214 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} x_1^{(4)} \\ x_2^{(4)} \\ x_3^{(4)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.2458 \\ 1.1111 \\ -0.2237 \end{bmatrix}$$

والتقريبان الخامس، والسادس هما على الترتيب

$$\begin{bmatrix} x_1^{(5)} \\ x_2^{(5)} \\ x_3^{(5)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.2470 \\ 1.1146 \\ -0.22434 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} x_1^{(6)} \\ x_2^{(6)} \\ x_3^{(6)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.2474 \\ 1.1147 \\ -0.2244 \end{bmatrix}$$

يمكنك ـــ الآن ـــ المقارنة مع الحل الذي نحصل عليـــه باســـتخدام طريقة المصفوفة العكسية ـــ مثلاً ـــ وهو

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.2475 \\ 1.1146 \\ -0.2243 \end{bmatrix}$$

6.5 طريقة زايـــــــــــدل التكرارية Seidel's Iterative Method

في هذا الفصل نقدم طريقة تكرارية أخرى مختلفة عن طريقة جاكوبي تسمى "طريقة زايدل التكرارية" نسبة إلى عالم الرياضيات والفلـــك الألماني زايدل (*Seidel L.*, 1821 - 1896). لنعتبر النظام القياسي

$$\begin{aligned} x_1 &= T_1 + c_{11}x_1 + c_{12}x_2 + c_{13}x_3 + \cdots + c_{1n}x_n \\ x_2 &= T_2 + c_{21}x_1 + c_{22}x_2 + c_{23}x_3 + \cdots + c_{2n}x_n \\ \vdots \quad & \quad \vdots \quad\quad \vdots \quad\quad \vdots \quad\quad \vdots \quad\quad \cdots \quad \vdots \\ x_n &= T_n + c_{n1}x_1 + c_{n2}x_2 + c_{n3}x_3 + \cdots + c_{nn}x_n \end{aligned} \tag{6.31}$$

ولنفرض أن التقريب الصفري هو

$$\mathbf{X}^{(0)} = \left[x_1^{(0)} \quad x_2^{(0)} \quad x_n^{(0)} \right]^t \tag{6.32}$$

وبما أن هذا التقريب الصفري (6.32) هو في حد ذاته حل للنظـــام (6.31)، إذا بالتعويض به، أي باستخدام التعويض

$$x_1 = x_1^{(0)}, \quad x_2 = x_2^{(0)}, \ldots, \quad x_n = x_n^{(0)} \tag{6.33}$$

في المعادلة الأولي من النظام (6.31) نحصل علـــى التقريـــب الأول للمجهول الأول x_1 فقط، والذي يرمز له بالرمز $x_1^{(1)}$، وهكـــذا نجد أن التقريب الأول للمجهول الأول x_1 هو

$$x_1^{(1)} = T_1 + c_{11}x_1^{(0)} + c_{12}x_2^{(0)} + c_{13}x_3^{(0)} + \cdots + c_{1n}x_n^{(0)} \tag{6.34}$$

الآن وباستخدام التعويض

$$x_1 = x_1^{(1)}, \quad x_2 = x_2^{(0)}, \ \ldots, \quad x_n = x_n^{(0)} \tag{6.35}$$

في المعادلة الثانية من النظام (6.31) يمكن أن نحصل على التقريـــب الأول للمجهول الثاني x_2 فقط، والذي يرمز له بالرمز $x_2^{(1)}$. أي أن

$$x_2^{(1)} = T_2 + c_{21}x_1^{(1)} + c_{22}x_2^{(0)} + c_{23}x_3^{(0)} + \cdots + c_{2n}x_n^{(0)} \tag{6.36}$$

الآن، باستخدام (6.36) ,(6.33) يتم التعويض عن

$$x_1 = x_1^{(1)}, \quad x_2 = x_2^{(1)} \quad , \quad ..., \quad x_n = x_n^{(0)} \tag{6.37}$$

في المعادلة الثالثة من النظام (6.31) نحصل علـــى التقريـــب الأول للمتغير الثالث $x_3^{(1)}$ في الشكل

$$x_3^{(1)} = T_3 + c_{21}x_1^{(1)} + c_{22}x_2^{(1)} + \cdots + c_{2n}x_n^{(0)} \tag{6.38}$$

وبنفس التكنيك نستمر حتى نحصل على التقريب الأول للمـــتغير النوني $x_n^{(1)}$ في الشكل

$$x_n^{(1)} = T_n + c_{n1}x_1^{(1)} + c_{n2}x_2^{(1)} + \cdots + c_{nn-1}x_{n-1}^{(1)} + c_{nn}x_n^{(0)} \tag{6.39}$$

وهكذا يمكن أن نحصل على التقريب الأول للحل، والذي يرمز له بالرمز $X^{(1)}$، حيث نجد أنه

$$X^{(1)} = \left[x_1^{(1)} \quad x_2^{(1)} \quad ... \quad x_n^{(1)} \right]^t \tag{6.40}$$

ثم نعاود الكرة باستخدام التقريب الأول (6.40) في المعادلـــة الأولي من النظام (6.31) ونستمر على نفس الخطوات السابقة مع المعادالة الثانية فالثالثة حتى المعادلة الأخيرة، حتى نحصل على التقريب الثاني للحل، ثم التقريب الثالث، وهكذا حتى تنتهي العمليـــة التكراريـــة بالدقة المطلوبة. بأسلوب آخر فإنه يمكن تلخيص طريقة زايدل كما يلى: إذا أُعطيت التقريب $x_i^{(k)}$ فإن التقريب التالي لـــه $x_i^{(k+1)}$ يمكن أن نحصل عليه من العلاقات الآتية:

$$x_1^{(k+1)} = T_1 + \sum_{j=1}^{n} c_{1j} x_j^{(k)} \tag{6.41}$$

$$x_2^{(k+1)} = T_2 + c_{21} x_1^{(k+1)} + \sum_{j=2}^{n} c_{2j} x_j^{(k)} \tag{6.42}$$

وهكذا حتى نحصل على

$$x_n^{(k+1)} = T_n + \sum_{j=1}^{n-1} c_{nj} x_j^{(k+1)} + c_{nn} x_n^{(k)};\ k = \overline{0,n} \tag{6.43}$$

6.6 تقـــــــارب الحـــل بطريقة زايـــــــدل
Convergence of Seidel's Method

إن الشروط الواجب تحقيقها بالنسبة للحلول التكرارية، التي نحصل عليها بطريقة زايدل هي نفس الـــشروط (6.28)، (6.27) الخاصـــة بتقارب طريقة جاكوبي التكرارية، غير أن حساب الخطأ في طريقـــة زايدل يختلف عن طريقة جاكوبي. لحساب الخطأ باستخدام طريقـــة زايدل نستخدم العلاقة

$$\left\| \mathbf{X} - \mathbf{X}^{(k)} \right\|_{\infty} \le \frac{\|\mathbf{C}\|_{\infty}^{(k)}}{1 - \|\mathbf{C}\|_{\infty}} \left\| \mathbf{X}^{(1)} - \mathbf{X}^{(0)} \right\|_{\infty} \tag{6.44}$$

حيث $\|\ \|_{\infty}$ هو أي معيار طبيعي بالنسبة إلى الصفوف أو الأعمدة.

مثال 6.6 أوجد حل النظام في المثال (6.5) باستخدام طريقة زايدل.

الحل لنعتبر الشكل القياسي

$$\begin{aligned} x_1 &= 0.24x_1 - 0.05x_2 - 0.24x_3 + 0.19 \\ x_2 &= -0.22x_1 + 0.09x_2 - 0.44x_3 + 0.97 \\ x_3 &= 0.13x_1 - 0.02x_2 + 0.42x_3 - 0.14 \end{aligned} \qquad (v)$$

لنعتبر التقريب الصفري

$$X^{(0)} = \begin{bmatrix} x_1^{(0)} \\ x_2^{(0)} \\ x_3^{(0)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.19 \\ 0.97 \\ -0.14 \end{bmatrix}$$

إذن، بالتعويض عن $X^{(0)}$ في المعادلة الأولي من النظام (v) نحـــصل على التقريب الأول للمتغير x_1 ، أي نحصل على

$$x_1^{(1)} = (0.24)(0.19) + (-0.05)(0.97) + (-0.24)(-0.14) + 0.19 = 0.2207$$

ويكون التقريب الأول للمجهول x_2 هو

$$x_2^{(1)} = (-0.22)(0.2207) + (0.09)(0.97) + (-0.44)(-0.14) + 0.97 = 1.0703$$

والتقريب الأول للمجهول x_3 هو

$$x_3^{(1)} = (0.13)(0.2207) + (0.02)(1.0703) + (0.42)(-0.14) - 0.14 = -0.1915$$

وهكذا نجد أن

$$X^{(1)}=\begin{bmatrix}x_1^{(1)}\\x_2^{(1)}\\x_3^{(1)}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0.2207\\1.0703\\-0.1915\end{bmatrix}$$

الآن، وبالتعويض عن $X^{(1)}$ في المعادلة الأولي من النظام (v) نحصل على التقريب الثاني للمتغيرات x_1,x_2,x_3 على الترتيب، وبالتالي فإن

$$x_1^{(2)}=(0.24)(0.2207)+(-0.05)(1.0703)+(-0.24)(-0.1915)+0.19=0.2354\,;$$
$$x_2^{(2)}=(-0.22)(0.2354)+(0.09)(1.0703)+(-0.44)(-0.1915)+0.97=1.0988\,;$$
$$x_3^{(2)}=(0.13)(0.2354)+(0.02)(1.0988)+(0.42)(-0.1915)-0.14=-0.2118$$

إذن

$$X^{(2)}=\begin{bmatrix}x_1^{(2)}\\x_2^{(2)}\\x_3^{(2)}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0.2354\\1.0988\\-0.2118\end{bmatrix}$$

وتنتهي العملية التكرارية عندما تقترب الحلول التقريبية من بعضها البعض في عمليتين تكراريتين متتاليتين. انظر جدول (6.1) للحلول التقريبية التكرارية $\left(x_1{}^{(k)}, x_2{}^{(k)}, x_3{}^{(k)}\right)$; $k = 0,1,2$ بالمقارنة مع الحل المضبوط $\left(x_1, x_2, x_3\right)$.

جدول 6.1

$k=0$	$\left(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, x_3^{(0)}\right)$	(0.1900, 0.9700 , -0.1400)
$k=1$	$\left(x_1^{(1)}, x_2^{(2)}, x_3^{(3)}\right)$	(0.2207,1.0703 , -0.1915)
$k=2$	$\left(x_1^{(2)}, x_2^{(2)}, x_3^{(2)}\right)$	(0.2354,1.0988, -0.2118)
$k=3$	$\left(x_1^{(3)}, x_2^{(3)}, x_3^{(3)}\right)$	(0.2424, 1.1088, -0.2196)
$k=4$	$\left(x_1^{(4)}, x_2^{(4)}, x_3^{(4)}\right)$	(0.2454, 1.1124, -0.2226)
$k=5$	$\left(x_1^{(5)}, x_2^{(5)}, x_3^{(5)}\right)$	(0.2467, 1.1138, -0.2237)
$k=6$	$\left(x_1^{(6)}, x_2^{(6)}, x_3^{(6)}\right)$	(0.2472, 1.1143, -0.2241)
$k=7$	$\left(x_1^{(7)}, x_2^{(7)}, x_3^{(7)}\right)$	(0.2474, 1.1145, -0.2243)

ويمكن ـــ الآن ـــ مقارنة متتابعة الحلول التقريبية التكرارية مع الحل المضبوط حيث نجد تطابق التقريب السابع $X^{(7)}$ حتى درجة دقـــة 10^{-3}، إذ أن الحل المضبوط هو

$$(x_1, x_2, x_3) = (0.2475, 1.1146, -0.2243)$$

✍.

مثال 6.7 أوجد عدد العمليات اللازمة لحل النظام بدرجة دقة 10^{-4}

$$\begin{aligned} 9.9x_1 - 1.5x_2 + 2.6x_3 &= 0 \\ 0.4x_1 + 13.6x_2 - 4.2x_3 &= 8.2 \\ 0.7x_1 + 0.4x_2 + 7.1x_3 &= -1.3 \end{aligned}$$

الحل نكون الصورة القياسية

$$\begin{aligned} x_1 &= 0.01x_1 + 0.15x_2 - 0.26x_3 + 0 \\ x_2 &= -002x_1 + 0.32x_2 + 0.21x_3 + 0.41 \\ x_3 &= -00.7x_1 - 0.04x_2 + 0.29x_3 - 0.13 \end{aligned}$$

بما أن

$$C = \begin{bmatrix} 0.01 & 0.15 & -0.26 \\ -0.02 & 0.32 & 0.21 \\ -0.07 & -0.04 & 0.29 \end{bmatrix}$$

إذن فإن

$$\| C \|_\infty = \max\{0.42,\ 0.55,\ 0.40\} = 0.55 < 1 \qquad \text{(i)}$$

بالتالي فإن الحلول التكرارية تتقارب إلى حل وحيد. نأخذ التقريب الصفري على أنه

$$x_1^{(0)} = 0,\ x_2^{(0)} = 0.41,\ x_3^{(0)} = -0.13$$

فنجد أن التقريب الأول هو

$$x_1^{(1)} = 0.0953 \ , x_2^{(1)} = 0.5126 \ , x_3^{(1)} = -0.1948$$

أي أن

$$\mathbf{X}^{(0)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0.41 \\ -0.13 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{X}^{(1)} = \begin{bmatrix} 0.0953 \\ 0.5120 \\ -0.1948 \end{bmatrix}$$

إذن

$$\mathbf{X}^{(1)} - \mathbf{X}^{(0)} = \begin{bmatrix} 0.0953 \\ 0.1120 \\ -0.0648 \end{bmatrix}$$

وإذا أخذنا المعيار $\|\ \|_\infty$ معياراً بالنسبة إلى الصفوف فإننا نجـــد أن معيار الفرق $\mathbf{X}^{(1)} - \mathbf{X}^{(0)}$ هو

$$\left\|\mathbf{X}^{(1)} - \mathbf{X}^{(0)}\right\|_\infty = 0.1120 \qquad \text{(ii)}$$

ولأن درجة الدقة المطلوبة هي 10^{-4}، أي أن الخطأ المطلق يجب ألا يزيد عن 10^{-4}، بمعنى أن لايزيد الفرق بين الحل التكراري $\mathbf{X}^{(k)}$، والحل المضبوط $\mathbf{X}$ عن المقدار 10^{-4}، إذن فإن المطلوب أن يكون

$$\left\|\mathbf{X}^{(1)} - \mathbf{X}^{(0)}\right\|_\infty = 0.1120 \qquad \text{(iii)}$$

وبالتعويض من (i), (ii), (iii) في العلاقة (5.36)، نجد أن

$$10^{-4} \le \frac{(0.55)^k}{0.45}(0.1120)$$

إذن

$$10^{-4} \cdot (0.45) \le (0.55)^{k} (0.1120)$$

وبأخذ لوغاريتم الطرفين، نحصل على

$$-4\ln(10) + \ln(0.45) \le k \ln(0.55) + \ln(0.1120)$$

حيث نحصل من هذه العلاقة على $k = 14$.

6.7 مسائل

(1) احسب كلاً من: $\| \|_2$ & $\| \|_\infty$ للمصفوفات الآتية

$A = \begin{bmatrix} -0.3 & 1.2 & -0.2 \\ -0.1 & -0.2 & 1.6 \\ -1.5 & -0.3 & 0.1 \end{bmatrix}$	$B = \begin{bmatrix} 0.2 & 0.44 & 0.81 \\ 0.58 & -0.29 & 0.05 \\ 0.05 & 0.34 & 6.1 \end{bmatrix}$
$C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 4 & 0 \\ 5 & 6 & 9 & 0 \end{bmatrix}$	$D = \begin{bmatrix} 0 & 0.44 & 0.81 \\ 0 & -0.29 & 0.05 \\ 0 & 0.34 & 6.1 \end{bmatrix}$

(2) أوجد الحل العام إن وجد

$3x_1 - 2x_2 + x_3 = 6$ $x_1 + 10x_2 - x_3 = 2$ $-3x_1 - 2x_2 + x_3 = 0$	$2x_1 - 3x_2 + x_4 - x_6 = 0$ $3x_1 - 2x_3 + x_5 = 0$ $x_2 - x_4 + 6x_6 = -3$

(3) ادرس تقارب الطرق التقريبية التكرارية (طريقة جاكوبي وطريقة زايدل)، ثم أوجد الحل التكراري في حالة كونه تقاربي، باســتخدام الطريقتين. احسب خطأ التقريب في كل حالة.

$6.1x_1 + 0.7x_2 - 0.05x_3 = 6.97$ $-1.3x_1 - 2.05x_2 + 0.87x_3 = 0.10$ $2.5x_1 - 3.12x_2 - 5.03x_3 = 2.04$
$8.7x_1 - 3.1x_2 + 1.8x_3 - 2.2x_4 = -9.7$ $2.1x_1 + 6.7x_2 - 2.2x_3 = 13.1$ $3.2x_1 - 1.8x_2 - 9.5x_3 - 1.9x_4 = 6.9$ $1.2x_1 + 2.8x_2 - 1.4x_3 - 9.9x_4 = 25.1$

(4) بين ما إذا كانت الطرق التقريبية التكرارية (طريقــة جــاكوبي وطريقة زايدل) تعطي حلولاً تقاربية للأنظمة التالية. فــإذا كانــت تقاربية أوجد عدد العمليات التكرارية (k) الــتي تعطــي الحلــول التكرارية بدرجة دقة 10^{-3}، وذلك باستخدام كل من الطريقتين.

$4x_1 - x_2 + x_3 = 4$ $2x_1 + 6x_2 - x_3 = 7$ $x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0$	$10x_1 - x_2 + 2x_3 = 6$ $-x_1 + 11x_2 - x_3 + 3x_4 = 25$ $2x_1 - x_2 + 10x_3 - x_4 = -11$ $3x_2 - x_3 + 8x_4 = 15$

****

7 نظرية ذات الحدين
Binomial Theorem

من النظريات الهامة في علم الجبر نظرية ذات الحـــدين وعلاقتـــها الوطيدة بالمتسلسلات اللانهائية، وهي من مفارقات علم الجـــبر إذ أن الكمية ذات الحدين الأثنين يمكن التعبير عنها بمتسلسلة لانهائية أي ذات عدد غير محدود من الحدود. أيضاً من دراسة هذه النظرية نكتشف افروق المذهلة التي يمكن تحدث عند أختلاف الأس مـــن عدد موجب إلى عدد سالب أو من عدد صحيح إلى عدد كسري. على أية حال فهذه النظرية شائعة الأستعمال والتطبيق تقريبـــا في معظم العلوم الطبيعية والتطبيقية بل والأقتصادية أيضاً.

7.1 مقدمة

نعلم من دراستنا السابقة كيف يمكن أن تعامل مع الأقواس المرفوعة للأسس 2,3,4 بسهولة فنجد مثلاً أن

$$\begin{aligned}(1+x)^2 &= 1+2x+x^2\\ (1+x)^3 &= 1+3x+3x^2+x^3 \qquad (7.1)\\ (1+x)^4 &= 1+4x+6x^2+4x^3+x^4\end{aligned}$$

الآن كيف يمكن لنا أن نعرف القاعدة التي على أساسها يمكن فـــك القوس لأي أس أو أي قوى مهما كانت؟ الإجابـــة علـــى هـــذه التساؤلات تقدمها النظرية الآتية

نظرية 7.1 — نظرية ذات الحدين

(1)إذا كان n عدد صحيح موجب فإن

$$(1+x)^n = 1 + C_1^n x + C_2^n x^2 + C_3^n x^3 + \cdots + C_r^n x^r + \cdots + C_{n-1}^n x^{n-1} + x^n = \sum_{r=0}^{n} C_r^n x^r \tag{7.2}$$

حيث

$$C_r^n = \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)}{r!} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$



$$C_0^n = C_n^n = \frac{n!}{0! \times n!} = 1$$

حيث $0! = 1$.

(2)في حالة أن n ليس عدداً صحيحاً موجباً (عـــدد كـــسري موجب أو سالب) فإن

$$(1+x)^n = 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2!}x^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}x^3 + \cdots + \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)}{r!}x^r + \cdots \tag{7.3}$$

أو

$$(1+x)^n = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)}{r!} x^r \qquad (7.4)$$

وهذه الأخيرة (7.4) متسلسلة لا نهائية. شرط أن يكون لها مجموع هو أن يقع x فى الفترة $-1 < x < 1$ أي يجب أن يكون $|x| < 1$.

✪✪✪

تطبيقات

إذا تم إعطاء قيم x بحيث يكون $x = 1, -1$ نحصل على بعض العلاقات الهامة

(1) بوضع $x = 1$ في (7.2) نحصل على

$$(1+1)^n = \sum_{r=0}^{n} C_r^n (1)^r \, 2^n \Rightarrow 2^n = \sum_{r=0}^{n} C_r^n \qquad (7.5)$$

$$2^n = \sum_{r=0}^{n} \frac{n!}{r!(n-r)!} \qquad (7.6)$$

(2) بوضع $x = -1$ في (7.2) نحصل على

$$0 = \sum_{r=0}^{n} (-1)^n C_r^n \qquad (7.7)$$

(3) بوضع $n=-1$ في (7.2) نحصل على

$$\frac{1}{1+x}=1-x+x^2-x^3+\cdots+(-1)^r x^r+\cdots \tag{7.8}$$

(4) بوضع $-x$ بدلاً x في (7.2) نحصل على

$$\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+x^3+\cdots+x^r+\cdots \tag{7.9}$$

(5) بوضع $n=-2$ في (7.2) نحصل على

$$\frac{1}{(1+x)^2}=1-2x+3x^2-4x^3+\cdots+(-1)^r(r+1)x^r+\cdots \tag{7.10}$$

7.2 مفكوك $(a+b)^n$

في هذا الفصل نستخدم نظرية ذات الحدين في الحصول على الشكل العام لمفطوك الكمية $(a+b)^n$ حيث a,b أي أعداد. بما أن

$$(a+b)^n=\left[a\left(1+\frac{b}{a}\right)\right]^n=a^n\left(1+\frac{b}{a}\right)^n$$

و باستخدام النظرية 7.1 نجد أن

$$(a+b)^n=a^n\sum_{r=0}^{n}C_r^n\left(\frac{b}{a}\right)^r=\sum_{r=0}^{n}C_r^n a^{n-r}b^r$$

أى أن

$$(a+b)^n=C_0^n a^{n-0}b^0+C_1^n a^{n-1}b+C_2^n a^{n-2}b^2+\dots$$

$$\dots + C_{n-1}^{n} ab^{n-1} + C_{n}^{n} a^{n-n} b^{r}$$

أو

$$(a+b)^n = a^n + C_1^n a^{n-1} b + C_2^n a^{n-2} b^2 + \dots \tag{7.11}$$
$$\dots + C_{n-1}^{n} ab^{n-1} + b^{r}$$

مثال 7.1 أوجد الأربعة حدود الأولى من مفكوك

$$(1-x)^{\frac{3}{4}}$$

الحل لدينا

$$(1-x)^{\frac{3}{4}} = 1 + \frac{3}{4}(-x) + \frac{\frac{3}{4}\left(\frac{3}{4}-1\right)}{2!}(-x)^2$$
$$+ \frac{\frac{3}{4}\left(\frac{3}{4}-1\right)\left(\frac{3}{4}-2\right)}{3!}(-x)^3 + \dots$$
$$= 1 - \frac{3}{4}x - \frac{3}{32}x^2 - \frac{5}{128}x^3 \;\; ; \;\; |x| < 1$$

مثال 7.2 اثبت أن مجموع المتسلسلة

$$1 + \frac{1}{3} + \frac{1 \cdot 3}{2!3^2} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{3!3^3} + \cdots$$

إلى اللانهاية يساوي $\sqrt{3}$.

الحل نفرض أن هذه المتسلسلة هي على صورة مفكوك ذات الحـــدين ،

أي نفرض أن

$$(1+x)^n = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1\cdot 3}{2!3^2} + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{3!3^3} + \cdots$$

وإذا فرضنا أن $|x|<1$، فإن الطرف الأيسر يساوي

$$(1+x)^n = 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2!}x^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}x^3 + \ldots$$

وبالتالي فإن

$$1 + nx + \frac{n(n-1)}{2!}x^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}x^3 + \ldots$$
$$= 1 + \frac{1}{3} + \frac{1\cdot 3}{2!3^2} + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{3!3^3} + \cdots$$

بمساواة الحدود فى الطرفين نحصل على

$$nx = \frac{1}{3},\ \ n(n-1)x^2 = \frac{1}{3},\ \ n(n-1)(n-2)x^3 = \frac{5}{9}$$

و بحل المعادلتين

$$nx = \frac{1}{3},\ \ n(n-1)x^2 = \frac{1}{3}$$

ينتج أن

$$n = -\frac{1}{2}, x = -\frac{2}{3}$$

وبالتعويض فى الصورة رقم (7.2) عن قيمة n,x، نجد أن

$$\left(1-\frac{2}{3}\right)^{-\frac{1}{2}} = \left(\frac{1}{3}\right)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{3}}} = \sqrt{3} \tag{7.12}$$

مثال 7.3 استخدم نظرية ذات الحدين في حساب $\sqrt[3]{37}, \sqrt{37}$.

الحل باستخدام نظرية ذات الحدين حيث $n = \frac{1}{2}, x = \frac{1}{36}$ وبما أن $|x| < 1$، إذن

$$\sqrt{37} = (36+1)^{\frac{1}{2}} = 6\left(1 + \frac{1}{36}\right)^{\frac{1}{2}} =$$

$$= 6\left[1 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{36}\right) - \frac{1}{8}\left(\frac{1}{36}\right)^2 + \frac{1}{16}\left(\frac{1}{36}\right)^3 - \cdots\right]$$

$$= 6\left(1 + \frac{1}{72} - \frac{1}{10368} + \frac{1}{746496} - \cdots\right) =$$

$$= 6(1 + 0.01389 - 0.00009 + 0.0000) = 6.820$$

أيضاً، بما أن $999 = 37 \times 27$، إذن فإن $37 = \frac{999}{27}$ وبالتالي نجد أن

$$\sqrt[3]{37} = (37)^{\frac{1}{3}} = \left(\frac{999}{27}\right)^{\frac{1}{3}} = \frac{(999)^{\frac{1}{3}}}{(27)^{\frac{1}{3}}} = \frac{1}{3}(1000-1)^{\frac{1}{3}}$$

$$= \frac{10}{3}\left(1 - \frac{1}{1000}\right)^{\frac{1}{3}}$$

$$= \frac{10}{3}\left(1 - \frac{1}{3000} - \frac{1}{9000000}\right) = 3.33333 - 0.011 = 3.33222$$

7.3 مسائل

(1) أوجد الأربعة حدود الأولى في مفكوك الكميات الآتية:

$\dfrac{1}{\left(1-x^2\right)^3}$	$(1+3x)^{-\frac{1}{2}}$	$(8+12x)^{\frac{2}{3}}$	$\left(1+x^2\right)^{-2}$
$\dfrac{1}{\left(1-2x^2\right)^3}$	$(1+3x)^{-\frac{1}{4}}$	$(16-x)^{-\frac{5}{4}}$	$(16-3x)^{\frac{5}{4}}$

(2) أوجد الثلاثة حدود الأولى فى مفكوك الكميات.

$\dfrac{(1-x)^{\frac{1}{3}}}{(1+x)^{\frac{1}{4}}}$	$\dfrac{(1-x)^{\frac{1}{3}}}{(1-2x)^{\frac{3}{5}}}$	$\dfrac{(1+x)^{\frac{1}{2}}}{(1+2x)^{\frac{3}{4}}}$	$\dfrac{(1-x)^{\frac{1}{3}}}{(1+2x)^{\frac{3}{4}}}$

(3) إذا كان $y > x$ أوجد الحد الخامس فى مفكوك الكميات

$\left(\sqrt{\dfrac{x}{3y}}-\sqrt{\dfrac{y}{2x}}\right)^{-4}$	$\left(\sqrt{\dfrac{x}{y}}-\sqrt{\dfrac{y}{x}}\right)^{-2}$	$\left(\sqrt{\dfrac{x}{y}}-\sqrt{\dfrac{y}{x}}\right)^{-4}$

(4) اثبت أنة إذا كان x صغير بحيث يمكن إهمال قوى x^4 والقوى الاعلى، فإن

$$\frac{\left(1-\frac{1}{2}x\right)^2(1+2x)^{\frac{1}{2}}}{\left(1+3x^2\right)^{\frac{1}{3}}}=1-\frac{9}{4}x^2+\frac{5}{4}x^3$$

****